第4卷第3期　　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　　Vol.4　No.3
2003年6月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Jun.2003

高斯白噪声中单频复正弦信号频率估计新方法

韩仲祥，　夏靖波，　王元一，　马志强
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安　710077)

摘　要:提出了一种高质量的正弦频率估计新方法,该方法的主要思想是:先对信号自相关矩阵进行特征值分解(Eigen value decompose 简称 EVD),找到最大特征值,尔后按一定规律构造一个非对称的相关阵,对其进行奇异值分解(Singular value decompose 简称 SVD),选取最小奇异值对应的奇异矢量,利用类似于 Pisarenko 谱估计方法的计算公式直接进行频率估计。模拟实验表明,在低信噪比(SNR)、短时数据下,利用这种方法进行单频复正弦频率估计,其分辨率和统计稳定性明显优于常规的 MUSIC 方法。

关键词:频率估计;分辨率;MUSIC
中图分类号: TN713　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2003)03-0068-04

高斯白噪声中复正弦频率估计问题一直是人们研究的重要课题,并且具有重要的实际应用价值。如移动通信中频率偏移的估计,通信中数字接收的载波检测和恢复及广播信号全数字接收等[1]。

假设 $x(n)$ 是由 1 个复正弦波信号加高斯白噪声经等间隔采样而得,即:

$$x(n)=e^{j2\pi fn}+W(n)\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{1}$$

设正弦波信号幅度为 1,$W(n)$ 为独立的加性复高斯白噪声过程,其均值为零,方差是 σ^2。针对这一特殊信号模型,许多文献给出不少的频率估计方法[1-4],获得了有益的结论。

1　频率估计新方法推导

设信号 $x(n)$ 的估计自相关函数为 $r(n)$,并令 P 维相关阵 $\boldsymbol{R}$ 为:

$$R=\begin{bmatrix} r(0) & r(-1) & \cdots & r(1-P) \\ r(2) & r(0) & \cdots & r(2-P) \\ & \cdot & & \\ r(P-1) & r(P-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}=q\boldsymbol{U}_p(\omega)\boldsymbol{U}_p(\omega)^{\mathrm{H}}+\sigma^2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}_0+\sigma^2\boldsymbol{I} \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{U}_p(\omega)=[1\quad e^{j\omega}\quad\cdots\quad e^{j(p-1)\omega}]^{\mathrm{T}}$ 为复正弦波信号矢量,ω 为复正弦波频率,q 表示信号功率。$\boldsymbol{R}$ 的特征值/特征矢量分解为

$$\boldsymbol{R}=(\lambda_{01}+\sigma^2)\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{H}}+\sum_{i=2}^{p}\sigma^2\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\quad i=2,3,\cdots,P \tag{3}$$

式(3)中 $\lambda_{01}>0$ 为 $\boldsymbol{R}_0$ 的非零特征值,$\lambda_1=\lambda_{01}+\sigma^2$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的主特征值,$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_P=\sigma^2$ 为噪声特征值,$\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,P)$ 为不同特征值对应的特征矢量。

主特征值对应的主特征矢量[6]为

$$\boldsymbol{u}_1=b_1\boldsymbol{U}_p(\omega)\qquad b_1\neq 0 \tag{4}$$

而

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_p(\omega)=0\qquad i=2,3,\cdots,P \tag{5}$$

收稿日期:2002-10-23
基金项目:高等学校重点实验室访问学者基金资助项目
作者简介:韩仲祥(1971-),男,山东莒南人,博士生,主要从事数字信号处理研究;
夏靖波(1973-),男,河北秦皇岛人,教授,博士(后),主要从事通信网络规划、通信网络管理技术研究.

式(4)说明主特征矢量位于由 $\{U_P(\omega)\}$ 张成的线性子空间(信号子空间),而式(5)则说明噪声特征矢量与信号子空间正交。

利用式(4),我们可将最大特征值对应的特征矢量 $\boldsymbol{u}_1$ 写成

$$\boldsymbol{u}_1=[u_{11}\quad u_{12}\quad\cdots\quad u_{1p}]^{\mathrm{T}}=b_1\boldsymbol{U}_P(\omega)=[v(1)\quad v(2)\quad\cdots\quad v(P)]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

根据文献[5]中相关定义,可令 $L\times M$ 阶矩阵 V:

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} v(1) & v(2) & \cdots & v(M)\\ v(K_S+1) & v(K_S+2) & \cdots & v(M+K_S)\\ & & \ddots & \\ v((L-1)K_S+1) & & \cdots & v(M+(L-1)K_S)\end{bmatrix} \tag{7}$$

式中 $\mathrm{Min}(L,M)>K,1\leqslant K_S\leqslant M,M+(L-1)K_3\leqslant P$,均为整数

根据文献[5],非对称阵可展开为

$$\boldsymbol{V}=b_1\boldsymbol{U}_L(K_S\,\omega)\boldsymbol{U}_M^{\mathrm{T}}(\omega) \tag{8}$$

设 V 的奇异值/奇异矢量分解为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{ASG}^{\mathrm{H}} \tag{9}$$

式中 A 和 G 分别为左奇异矢量矩阵和右奇异矢量矩阵:

$$\boldsymbol{A}=[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_L]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{G}=[g_1\quad g_2\quad\cdots\quad g_M]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 & & & 0\\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_{Lr}\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant x_{Lr}$ V 是阵的奇异值,$Lr=\mathrm{Min}\ (\ L,M\ )$。

根据参考文献[4],$\{U_L(K_S\,\omega)\}$ 及 $\{U_L(\omega)\}$ 线性无关,因此据文献[6],式(7)定义的 V 阵的秩满足:

$$\mathrm{rank}\ (\ \boldsymbol{V}\ )\ =\ 1 \tag{13}$$

又由于 $\boldsymbol{g}_i,i=2,3,\cdots,M$ 是 V 阵的零奇异值(因为 V 阵的秩为 1)对应的右奇异矢量,因此

$$\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{g}_i=0\qquad i=2,3,\cdots,M \tag{14}$$

将式(8)代入式(14)可得

$$(b_1\boldsymbol{U}_M^{\mathrm{T}}(\omega)\boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{U}_L(K_S\,\omega)=0 \tag{15}$$

由于 $\{\boldsymbol{U}_L(K_S\,\omega)\}$ 线性无关,因此式(7)定义的 V 的右奇异矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 满足

$$\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_M(\omega)=0\quad i=2,3,\cdots,M \tag{16}$$

选择合适的 L、M 和 K_S(因为 $M+(L-1)K_S\leqslant P$,因此也就选择了 P 的最小数值),这样,先对相关阵进行 EVD 处理,选取其中最大特征值矢量,并对其重新排阵,将一维的矢量转换成二维的矩阵并进行 SVD 处理,利用式(16)就可以构成一种新的谱估计方法。其中有几个参数需要确定。其一是 g_i 在 $i=2,3,\cdots,M$ 中如何选择,是其中的一个矢量还是几个矢量的组合,根据我们的模拟试验同时为了保证不受阶数误判的影响而选择最小奇异值对应的右奇异矢量 g_M 为正交矢量,这样还有一个好处就是数学上只求一个矩阵的最小奇异值对应的奇异矢量,其算法成熟,运算量大大降低;其二是式(7) V 阵中 K_S 的选择问题。显然 K_S 取最大值 M,则 $M+(L-1)K_S=P$ 也将很大,P 值大阶数大,会提高分辨率,但要计算 P 维自相关矩阵的最大特征值对应的特征矢量,P 的增大,计算量也会增大;反之,当 $K_S=1$,P 的值也随之下降(L 和 M 固定),分辨率也会下降,计算量也有降低。

新的谱估计方法主要步骤有:①根据测量数据计算自相关矩阵;②求 P 维自相关矩阵的最大特征值对应的特征向量;③按式(7)排出 V 阵;④求 V 阵的最小奇异值对应的右奇异矢量;⑤用类似于 Pisarenko 谱估计方法计算信号功率谱。

$$P_{\mathrm{new}}(\omega)=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_M(\omega)|^2} \tag{17}$$

这种方法中只计算高阶相关阵的一个最大特征值对应的特征矢量,然后再计算一个低阶矩阵的一个最小奇异值对应的矢量,因此这种谱估计法,其计算量比 P 阶 MUSIC 法要小一些;比 M 阶 MUSIC 法稍大(主要多在先要对 $\boldsymbol{R}$ 进行 $\boldsymbol{P}$ 阶矩阵 EVD 分解求最大特征值对应的特征矢量)。

基于正交子空间的谱估计方法,已经具有较好的统计稳定性,因此本文提出的新方法的谱估计法应具有很好的稳定性;同时来源于高阶的相关阵,因此该方法又具有高阶 MUSIC 法的分辨率,而且是低阶矩阵分解,出现伪峰的机率要小。大量计算机模拟实验证实了这一点。

2 计算机模拟实验

设信号模型为式(1)所示,$N=25$ 为取样数据长度,$W(n)$ 是方差为 σ^2、均值为零的复高斯白噪声,f 作归一化处理,统计独立实验次数均为 10 次,式(7)中取 $K_s=1$、2、3。本文提出的新方法用 ESD 来表示。$n\times n$ 阶的 MUSIC 法简写为 MUSIC$n\times n$, $n\times m$ 阶的 ESD 法简写为 ESD $n\times m$,其余类同,(L、M 固定)。

(25,0.5,0.5,10)表示 $N=25$,$f_1=0.5$,$\sigma^2=0.5$,times = 10 ,其余类同。

2.1 $K_s=1$ 时

图 1 和图 2 分别为 $N=25$,$f_1=0.5$,$\sigma^2=0.5$,times = 10 及 $N=25$,$f_1=0.5$,$\sigma^2=1$,times = 10 时的正弦频率分辨图,横轴表示归一化频率,纵轴表示功率谱的幅度。

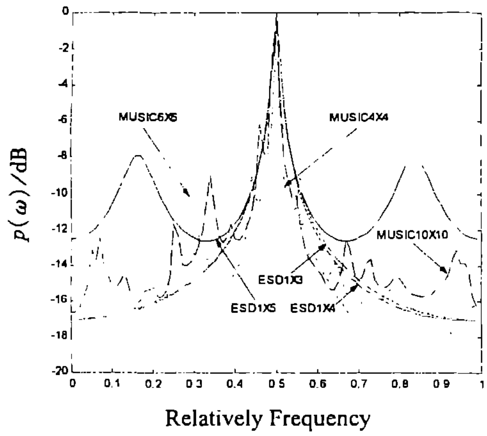

图 1 $\sigma^2=0.5$ 时的频率分辨图

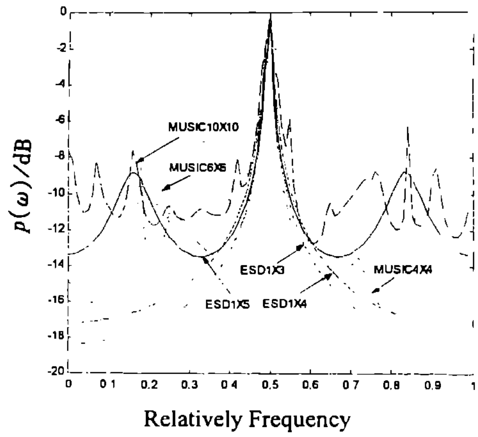

图 2 $\sigma^2=1$ 时的频率分辨图

2.2 $K_s=2$ 时

图 3 和图 4 分别为 $N=25$,$f_1=0.5$,$\sigma^2=0.5$,times = 10 及 $N=25$,$f_1=0.5$,$\sigma^2=1$,times = 10 时的正弦频率分辨图,横轴表示归一化频率,纵轴表示功率谱的幅度。

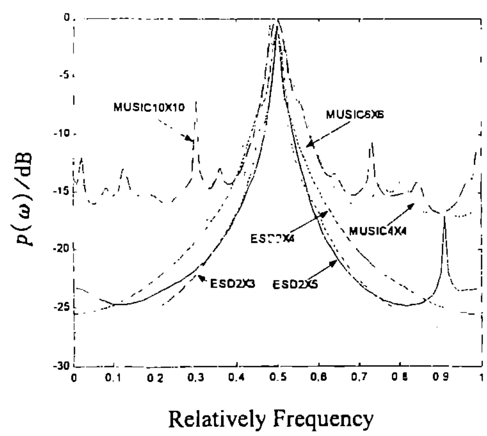

图 3 $\sigma^2=0.5$ 时的频率分辨图

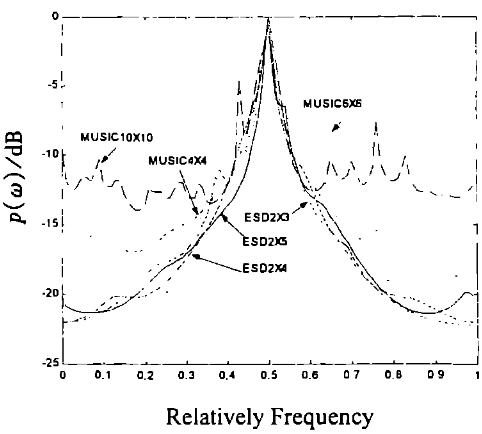

图 4 $\sigma^2=1$ 时的频率分辨图

从上面的实验结果可以看出,在 $N=25$,$f_1=0.5$ 时,MUSIC 方法伪峰较大,MUSIC 4×4 方法与 MUSIC 6×6 方法几乎分辨不出信号的频率,而 ESD 方法(即本文方法)的谱估计质量明显优于 MUSIC 10×10 方法(ESD 1×5 方法除外),几乎没有伪峰出现,在 $K_s=1$ 时,以 ESD 1×3 方法为最优,在 $K_s=2$ 时,以 ESD 2×5 方法为最优;另外,随着噪声方差的加大,ESD 方法的优越性就越明显,当然,随着阶数的增加,运算量亦加大,并有小的伪峰出现,实验还表明:取样数据长度加大,ESD 方法的分辨效果就越好。这种新方法也可以用来分辨多个复正弦波频率,但有些问题需要解决,比如 Ks 如何选择才能使频率分辨效果最好等,这些内容有必要继续研究。

3　结论

大量计算机模拟结果表明,本文提出的单频频率估计方法,在低信噪比、短时数据情况下,其分辨率明显高于常规的高阶 MUSIC 方法,且几乎没有伪峰出现,是一种高分辨率、高统计稳定性的频率估计方法。在雷达的1个距离单元内,一般只存在1个信号,用 ESD 1×3 进行谱估计所用的计算量相对较小,而稳定性最好,没有伪峰出现,具有较好的应用效果。

参考文献:

[1] 熊　鹰. 高斯白噪声中单频复正弦信号频率估计[J]. 通信学报,2001,23(1):25-30.

[2] 李　阳. 基于正交冗余采样的超分辨信号谱估计[J]. 电子与信息学报,2002,24(7): 865-871.

[3] KIM D. NARASIMHA M J,COX D C. An improved single frequency estimation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1996,3(7):212-214.

[4] FITZ M P. Further results in the fast estimation of a single frequency [J]. IEEE Trans Commun,1994,42(2):863-864.

[5] 黄登山 谱估计方法的通用矩阵表示与新的谱估计方法[J]. 电子学报,1994,21(4):4101-104.

[6] 韩仲祥,夏军利. 基于正交子空间波达方向的新算法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(4):30-32.

(编辑:门向生)

A New Method for Frequency Estimation of Single Complex Sinusoid in White Gaussian Noise

HAN Zhong-xiang,　XIA Jin-Bo,　WANG Yuan-yi,　MA Zhi-qing

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an,Shaanxi 710077, China)

Abstract: This paper gives a new and better method for quality frequency estimation of single complex sinusoid. The method meaning: decompose autocorrelation matrix of signal in eigen value first to find the biggest eigen value, then reorder a new non-symmetrical correlation matrix according to a certain rule, decompose it in singular value select the smallest vector of singular value and directly estimate frequency by means of the computation formula similar to the Pisarenko method. The simulations experiments show that the new method is of high resolution and high statistical stability in lower SNR and shorter data as compared with the MUSIC method.

Key words: frequency estimation; resolution; MUSIC