

# 灰色关联分析中分辨系数的选取

申卯兴<sup>1</sup>, 薛西锋<sup>2</sup>, 张小水<sup>1</sup>

(1. 空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800; 2. 西北大学 数学系, 陕西 西安 710069)

**摘要:**通过论证灰色关联分析中分辨系数对灰色关联系数的影响,指出了选取分辨系数时应明确的几个结论,将通常见于灰色关联分析文献中取分辨系数 $\rho=0.5$ 改进为 $\rho=0.05$ ,以提高灰色关联分析的分辨率。

**关键词:**灰色关联分析;关联系数;分辨系数;分辨率

**中图分类号:** O159    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1009-3516(2003)01-0068-03

灰色关联分析已经在综合评判、聚类分析(如:工作业绩、工程效益、学术科研成果的评价,目标识别、系统效能分析等领域)等序列性数据的研究中得到了广泛应用。灰色关联系数、灰色关联度是灰色关联分析中最为基本的概念,对此已经有许多研究和推广。而最基本且经常应用的关联度是以灰色关联系数为基础的。在灰色关联系数中,灰色分辨系数是直接影响关联分析分辨率的一个因子,它的取值决定着灰色关联系数的分布状况。

## 1 问题背景

设参考序列为  $X_0 = \{X_0(k) | k=1, 2, \dots, n\}$ , 比较序列为  $X_i = \{X_i(k) | k=1, 2, \dots, n\}, i=1, 2, \dots, m$ , 则灰色关联系数定义为<sup>[1]</sup>

$$\xi_i(k) = \frac{\min_k \min_i \Delta_i(k) + \rho \max_k \max_i \Delta_i(k)}{\Delta_i(k) + \rho \max_k \max_i \Delta_i(k)} \quad (1)$$

其中  $\Delta_i(k) = |X_0(k) - X_i(k)|, i=1, 2, \dots, m, \rho \in (0, +\infty)$  称为分辨系数。

显然,灰色关联系数  $\xi_i(k)$  的值直接与分辨系数  $\rho$  的值有关,而  $\rho$  是独立于  $X_0, X_i$  之外的人为取值的一个常数。常见的文献中指出取  $\rho \in [0, 1]$ ,在具体应用中都常取  $\rho=0.5$ ,也有文献指出“当  $\rho \leq 0.5463$  时,比较容易观察关联度分辨率的变化”,“根据经验,一般取  $\rho \leq 0.5$  最恰当”。文献[2]、[3]都指出了  $\rho=0.5$  的不合理性。那么,到底  $\rho$  通常取值为多大才算合适,  $\rho$  的取值怎样影响灰色关联系数  $\xi_i(k)$  的值呢? 这是在进行灰色关联分析中必须面对的一个问题。

## 2 $\rho$ 对 $\xi_i(k)$ 的影响的分析

简记  $\max_k \max_i \Delta_i(k) \triangleq \max, \min_k \min_i \Delta_i(k) \triangleq \min$ , 式(1)变为

$$\xi_i(k) = \frac{\min + \rho \max}{\Delta_i(k) + \rho \max}$$

从而, 
$$\xi_i(k) = \begin{cases} 1 & \Delta_i(k) = \min \text{ 时} \\ \rho \frac{\min}{\max} \geq \frac{\rho}{1+\rho} & \Delta_i(k) = \max \text{ 时} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

收稿日期:2002-06-24

基金项目:国家“高等学校骨干教师计划”资助项目(GG-1105-90039-1004)

作者简介:申卯兴(1961-),男,陕西合阳人,教授,主要从事防空作战决策分析及其优化理论与方法研究。

那么, 
$$\rho/(1+\rho) \leq \xi_i(k) \leq 1 \tag{2}$$

特别,当对确定的  $i, k$ , 当  $\Delta_i(k) = \max$  且  $\min = 0$  时,  $\xi_i(k) = \rho/(1+\rho)$ , 这表明  $\xi_i(k)$  取值范围的下确界是  $\rho$  的函数  $\rho/(1+\rho)$ , 记其为

$$b = b(\rho) \triangleq \inf_{i,k} \xi_i(k) = \rho/(1+\rho) \tag{3}$$

由于

$$\frac{d}{d\rho} b(\rho) = \frac{1}{(1+\rho)^2} > 0; \quad \frac{d^2}{d\rho^2} b(\rho) = \frac{-2}{(1+\rho)^3} < 0; \quad \frac{d^3}{d\rho^3} b(\rho) = \frac{6}{(1+\rho)^4} > 0$$

从而可知在区间  $[0, +\infty)$  内,  $b(\rho)$  凸性单调增, 且  $0 \leq b(\rho) \leq 1$ ,  $b = b(\rho)$  以  $b = 1$  为渐近线;  $b'(\rho)$  凹性单调减, 且  $0 < b'(\rho) \leq 1$ ,  $b = b'(\rho)$  以  $b = 0$  为渐近线。

由于对于任意  $0 < b_0 < 1$ , 可以从  $\rho/(1+\rho) = b_0$  解出

$$\rho_0 = b_0/(1-b_0) \tag{4}$$

又因为  $b(\rho)$  单调增加, 所以, 当  $\rho \geq \rho_0$  时,  $b(\rho) \geq b(\rho_0) = b_0/(1-b_0)$ , 从而

$$b(\rho_0) \leq \xi_i(k) \leq 1, \quad (\rho \geq \rho_0, \text{ 即 } \rho \in [0, +\infty)) \tag{5}$$

为了提高关联系数  $\xi_i(k)$  对  $X_0$  与  $X_i$  的分辨率, 我们应尽可能使  $\xi_i(k)$  的取值的散布范围(灰色关联系数的取值区间的长度)较大。若欲使  $\xi_i(k)$  散布于长度为  $1-b_0$  的区间  $[b_0, 1]$ , 依式(4)、式(5), 只要令

$$\rho \leq b_0/(1-b_0) \tag{6}$$

对于  $b_0, \rho_0$  的一些特殊数值有如下对应表(见表 1)。依表 1 知, 若取  $\rho_0 = 0.5$ , 则  $0.3333 \leq \xi_i(k) \leq 1$ , 即: 最坏的关联程度也会使关联系数不小于 0.3333; 若取  $\rho_0 = 1.0$ , 则  $0.5 \leq \xi_i(k) \leq 1$ , 即: 最坏的关联程度也会使关联系数不小于 0.5。这与人们通常的心理和认知感觉显然有悖, 失去认知的合理性。

表 1  $b_0, \rho_0$  的一些特殊数值对应表

$\rho_0$	0.05	0.052 6	0.1	0.111 1	0.5	1.0	3.0	10.0	19.0	49.0
$b_0$	0.047 6	0.05	0.090 9	0.1	0.333 3	0.5	0.75	0.909 1	0.95	0.98

由于  $\rho_0 = 19$  时,  $\xi_i(k) \in [0.95, 1]$ ;  $\rho_0 = 0.0526$  时,  $\xi_i(k) \in [0.05, 1]$ , 那么, 按通常的 0.95 原则, 分辨系数  $\rho$  不应超过 19, 应尽可能使  $\rho \leq 0.0526$ 。若  $\rho_0 = 0.05$ , 则  $\xi_i(k) \in [0.0476, 1]$ , 这时灰色关联系数的取值区间的长度为 0.9524; 若  $\rho_0 = 49$ , 则  $\xi_i(k) \in [0.98, 1]$ , 这时灰色关联系数的取值区间的长度仅为 0.02。这就表明了为了使灰色关联系数具有良好的表现性(使得灰色关联系数的取值区间的长度尽可能地接近 1), 通常不必考虑  $\rho \geq 20$ , 应最好取  $\rho$  值在 0.05 附近较佳(使灰色关联系数的取值区间的长度达到 0.95)。

### 3 结论

通过如上分析, 我们可以给出如下结论:

- 1) 分辨系数  $\rho$  的取值与分辨率成反比,  $\rho$  小, 分辨率大;  $\rho$  大, 分辨率小。 $\rho$  的取值大小关键在于控制  $\xi_i(k)$  的散布范围;
- 2) 原则上,  $\rho$  可取值于  $(0, +\infty)$ , 而通常可依不同需求考虑其取值在区间  $[0, 20)$  (或  $[0, 19]$ );
- 3) 若要使  $\xi_i(k)$  散布区间的长度不小于 0.5, 则应限制  $\rho \in [0, 1]$ ;
- 4) 当  $\rho \leq 0.05263$  时, 较容易观察关联度的分辨率的变化, 故通常应取值  $\rho = 0.05$ , 以保证  $\xi_i(k) \in [0.0476, 1]$ ;

5)  $\xi_i(k)$  的极差  $D = \max - \min \leq 1 - b_0 = 1 - \rho_0/(1+\rho_0) = \frac{1}{1+\rho_0}$ ,  $\rho$  值 ( $\rho = \rho_0$ ) 的大小也可依欲得  $D$  值的大小而定;

6)  $\rho \rightarrow +\infty$  时,  $\xi_i(k) \rightarrow 1$ , 即, 随着  $\rho$  的取值趋向变大,  $\xi_i(k)$  的取值随之聚集于 1 而使关联程度难以分辨, 使关联分析难以进行。

由此可见, 在进行灰色关联分析时, 对分辨系数的选择应注意以上几个问题, 通常, 应取分辨系数  $\rho = 0.05$  为宜, 以符合人们的认知习惯, 也符合统计数据分析领域的 0.95 原则; 或者, 可以根据具体需要进行给定

分辨率的灰色关联分析。

**参考文献:**

- [1] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 武汉:华中工学院出版社, 1990.
- [2] 申卯兴. 分辨系数对灰色关联系数的影响[J]. 陕西师范大学学报, 1999,27(S. I. ):82-84.
- [3] 刘震宇. 灰色系统分析中存在的两个基本问题[J]. 系统工程理论与实践 2000,20(9),123-124.
- [4] 傅立. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京:科学技术文献出版社, 1992.
- [5] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 武汉:华中工学院出版社, 1985.
- [6] 袁嘉祖. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京:科学出版社, 1991.

(编辑:田新华)

## Determination of Discrimination Coefficient in Grey Incidence Analysis

SHEN Mao-xing<sup>1</sup>, XUE Xi-feng<sup>2</sup>, ZHANG Xiao-shui<sup>1</sup>

(1. The Missile Institute of Air Force Engineering University, Sanyuan Shaanxi, 713800; 2. The Mathematics Department of Northwest University, Xi'an Shaanxi, 710069, China)

**Abstract:** Through demonstrating the influence of discrimination coefficient on grey incidence coefficient in the grey incidence analysis, this paper presents some conclusions defined in selecting discrimination coefficient and the improvement in selecting discrimination coefficient and the improvement in selecting the discrimination coefficient in usual grey incidence analysis literature which is changed from  $\rho = 0.5$  to  $\rho = 0.05$ , thus the rate of discrimination is improved.

**Keyword:** grey incidence analysis; grey incidence coefficient; discrimination coefficient; rate of discrimination

(上接第 56 页)

## Study of Improving the Efficiency of Huge Traffic Network Shortest Circuit Search

GAO Hong-ni, YANG Jian-jun, CAO Ze-yang

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

**Abstract:** According to the characteristics of huge traffic network, including many nodes and discrimination of path grade, this paper presents a new method of solving combination explosion problem in course of huge traffic network shortest circuit search.

**Keywords:** traffic network; shortest circuit; search efficiency