一类SIS流行病传染模型的全局分析

李建全， 杨有社， 杨国平
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘 要:对一类具有非常数输入的SIS流行病传染模型进行分析,得到该模型解的性态和各类平衡点存在的阈值条件,通过分析各平衡点的局部稳定性和构造Dulac函数,证明了各类平衡点的全局稳定性。

关键词:流行病模型;平衡点;全局稳定性
中图分类号:O175.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2002)05-0088-03

流行病在现实生活中广泛存在。对流行病传染模型的研究已是数学应用的一个重要领域。根据流行病的传播特点,一般将流行病传播模型分为SI、SIS、SIR和SIRS等类型。人们往往关心的是模型中各参数满足什么条件时,该流行病会最终灭绝。这也是数学工作者研究的一个重点。因此,针对该类问题研究的焦点就在于无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性。

1 模型

我们假设在一定环境中,当某种群中不存在流行病时,其总种群(N)的生长服从微分系统

$$N' = be^{-aN}N - dN \tag{1}$$

其中 $N=N(t)$ 表示 t 时刻该环境中总种群的个体数量,be^{-aN}表示种群中单位个体的生育率,d表示单位个体的自然死亡率,$b>d>0,a>0$。当流行病存在于该种群中时,流行病的传播服从双线性传染率 $\beta SI(\beta>0)$的SIS模型,即

$$\begin{cases} S' = be^{-aN}N - \beta SI - dS + \gamma I \\ I' = \beta SI - (d+\alpha+\gamma)I \end{cases} \tag{2}$$

这时总种群的生长服从系统

$$N' = be^{-aN}N - dN - \alpha I \tag{3}$$

其中 $S=S(t)$ 和 $I=I(t)$ 分别表示 t 时刻易感类(S)和染病类(I)中个体的数量,$N(t)=S(t)+I(t)$。$\alpha>0,\gamma>0$ 分别表示染病者的因病死亡率和染病者的恢复率。文献[1]对相应的标准形传染率模型作了完整的分析。当 $\gamma=0$ 时,该模型就是SI流行病传播模型。文献[2]对此已作过讨论。

将 $S=N-I$ 代入系统(2)的第二式,再与式(3)联立,即得:

$$\begin{cases} I' = I[\beta(N-I)-(d+\alpha+\gamma)] = F(I,N) \\ N' = be^{-aN}N - dN - \alpha I = G(I,N) \end{cases} \tag{4}$$

本文就系统(4)进行完整的讨论。

2 解的性态和平衡点的存在性

定理1 对于系统(4),下列结论成立:

收稿日期:2002-03-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19971066)
作者简介:李建全(1965-),男,山西万荣人,副教授,博士生,主要从事微分方程定性理论及其应用研究.

1) 如果 $I(0)=0$，则对 $t>0$ 有 $I(t)\equiv 0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\frac{1}{a}\ln\frac{b}{d}\overset{\Delta}{=}N_0$。

2) 如果 $I(0)>0$，则对 $t>0$ 有 $I(t)>0$，且区域 $D=\{(I,N):I\geqslant 0,I<N\leqslant N_0\}$ 是系统(4)的正不变集。

3) 记 $R_0=\frac{\beta N_0}{d+\gamma+\alpha}$。对于系统(4)，总有无病平衡点 $P_0(0,N_0)$，当且仅当 $R_0>1$ 时还存在地方病平衡点 $P^*(I^*,N^*)$，其中

$$I^*=N^*-\frac{d+\gamma+\alpha}{\beta}$$

N^* 是方程

$$d+\alpha\text{-}be^{-aN}=\frac{\alpha(D+\gamma+\alpha)}{\beta N}$$

在区间$(0,N_0)$上的唯一正根。

证明 结论 1)、2)显然成立，证明略。

由 3) 易知点 $P_0(0,N_0)$ 总是系统(4)的无病平衡点。其地方病平衡点由方程组

$$\begin{cases}\beta(N-I)=d+\alpha+\gamma\\(be^{-aN}-d)N-\alpha I=0\end{cases}\tag{5}$$

来确定。由系统(5)中的第一方程得

$$I=N-\frac{d+\gamma+\alpha}{\beta}\tag{6}$$

将式6)代人系统(5)的第二方程，得

$$d+\alpha\text{-}be^{-aN}=\frac{\alpha(d+\gamma+\alpha)}{\beta N}\tag{7}$$

记$f(N)=d+\alpha\text{-}be^{-aN}$，　$g(N)=\frac{\alpha(d+\gamma+\alpha)}{\beta N}$。易知函数$f(N)$是严格单调递增的，$g(N)$是严格单调递减的。$f(0)=d+\alpha-b$，　$f(N_0)=\alpha$。$\lim\limits_{N\to 0^+}g(N)=+\infty$，　$g(N_0)=\frac{\alpha(d+\gamma+\alpha)}{\beta N_0}$。因此，当且仅当 $R_0>1$ 即$f(N_0)<g(N_0)$时，式(7)在$(0,N_0)$内有唯一根 N^*，将 N^* 代入式(6)即得 I^*。

3　全局分析

定理 2　对于系统(4)，P_0 当 $R_0\leqslant 1$ 时是渐近稳定的，当 $R_0>1$ 时是不稳定的；P^* 当 $R_0>1$ 时是渐近稳定的。

证明 1) 直接计算可得，系统(4)在无病平衡点 P_0处的 Jacobi 矩阵为

$$J(P_0)=\begin{pmatrix}(d+\alpha+\gamma)(R_0-1) & 0\\ -\alpha & -abN_0e^{aN_0}\end{pmatrix}$$

由此易知，P_0 当 $R_0<1$ 时是渐近稳定的，当 $R_0>1$ 时是不稳定的，当 $P_0=1$ 时是高阶奇点。

为了证明当 $R_0=1$ 时 P_0在第一象限内是渐近稳定的，作变换[4]：

$$u=I,\quad v=\alpha I+abN_0e^{-aN_0}(N-N_0),\quad t=-\tau$$

则系统(4)变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{d\tau}=-\beta u\left[\frac{e^{aN_0}}{abN_0}v-\left(1+\frac{\alpha e^{aN_0}}{abN_0}\right)u\right]\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=abN_0e^{-aN_0}v-\alpha\beta u\left[\frac{e^{aN_0}}{abN_0}v-\left(1+\frac{\alpha e^{aN_0}}{abN_0}\right)u\right]-\\ \qquad ab^2N_0e^{-2aN_0}\left\{\left[N_0+\frac{v-\alpha u}{abN_0}e^{aN_0}\right]\varphi\left(\frac{v-\alpha u}{abN_0}e^{aN_0}\right)-\frac{(v-\alpha u)^2}{ab^2{N_0}^2}e^{2aN_0}\right\}\end{cases}$$

其中 $\varphi(w)=e^{-aw}-1+aw$。由$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=0$，即

$$abN_0e^{-aN_0}v-\alpha\beta u\left[\frac{e^{aN_0}}{abN_0}v-\left(1+\frac{\alpha e^{aN_0}}{abN_0}\right)u\right]-$$

$$ab^2N_0e^{-2aN_0}\left\{\left[N_0+\frac{v-\alpha u}{abN_0}e^{aN_0}\right]\varphi\left(\frac{v-\alpha u}{abN_0}e^{aN_0}\right)-\frac{(v-\alpha u)^2}{ab^2{N_0}^2}e^{2aN_0}\right\}=0$$

可确定函数 $v=\psi(u)$ 。它满足 $\psi(0)=0$, ,$\psi'(0)=0$,因此 $\psi(u)=o(u)$ 。将 $v=\psi(u)$ 代入 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}$,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=\beta\left(1+\frac{\alpha e^{aN_0}}{abN_0}\right)u^2+o(u^2)$$

根据文献[3]中的定理 7.1 知,此时 P_0 在第一象限内是渐近稳定的。

2) 直接计算可得,系统(4)在地方病平衡点 P^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(P^*)=\begin{pmatrix}-\beta I^* & \beta I^* \\ -\alpha & be^{-aN^*}+abN^*e^{-aN^*}\end{pmatrix}$$

由式(7)知,$d+\alpha-be^{-aN^*}>0$,所以 $\det J(P^*)=\beta I^*(d+\alpha-be^{-aN^*}+abN^*e^{-aN^*})>0$。由系统(5)的第一式有 $N^*>\frac{d+\alpha+\gamma}{\beta}>\frac{\alpha}{\beta}$,所以 $\beta I^*>\frac{\alpha I^*}{N}$。由系统(5)的第二式有 $be^{-aN^*}-d=\frac{\alpha I^*}{N^*}$,因此 $be^{-aN^*}-d-\beta I^*<0$。这样,$\mathrm{tr}J(P^*)=be^{-aN^*}-d-\beta I^*-abN^*e^{-aN^*}<0$。从以上推理得,$P^*$ 当 $R_0>1$ 时是渐近稳定的。

定理 3 对于系统(4),当 $R_0\leqslant 1$ 时 P_0 是全局渐近稳定的,当 $R_0>1$ 时 P^* 是全局渐近稳定的。

证明 因为 $N=I$ 是系统(4)的无切直线[5],所以构造 Dulac 函数为 $B(I,N)=\frac{1}{I(N-I)}$,则

$$\frac{\partial(FB)}{\partial I}+\frac{\partial(GB)}{\partial N}=-\frac{abNe^{-aN}}{I(N-I)}-\frac{be^{-aN}+\gamma}{(N-I)^2}<0$$

因此系统(4)不存在周期解。于是根据定理 2,定理 3 成立。

参考文献:

[1] Cooke K, van den Driessche P, Zou X. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models [J]. J Math Biol, 1999, 39(2): 332-352.

[2] Zhou J, Hethcote H W. Population size dependent incidence in models for disease without immunity [J]. J Math Biol, 1994, 32(5): 809-834.

[3] ZHANG Zhi-fen, DING Tong-ren. Qualitative theory of differential equations [M]. Translations of Mathematical Monographs: Rhode Island, 1992.

[4] 李建全,杨友社. 一类成虫竞争模型的定性分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(2):87-90.

[5] 李建全,王国正. 一类平面微分系统的极限环的不存性[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2001,2(2):78-81.

(编辑:门向生)

Global Analysis of a Type of SIS Epidemic Model

LI Jian-quan, YANG You-she, YANG Guo-ping

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: For a type of SIS epidemic model with the non-constant input, the behavior of solution and the threshold conditions of existing equilibria are obtained. By analyzing the local stability of all equilibria and constructing Dulac function, the global stability of all equilibria is proved.

Key words: epidemic model; equilibrium; global stability