第 3 卷第 3 期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol.3 No.3
2002 年 6 月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Jun. 2001

离散 Hopfield 型神经网络的异步收敛性研究

刘洪坤[1]， 马润年[2]
(1. 海军工程大学，湖北 武汉 430033;2. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘 要:主要研究非对称离散 Hopfield 神经网络的异步演化方式的收敛性,并给出了一些新的收敛性条件。若网络的连接权矩阵可以分解成主对角元素非负的对称矩阵和行(列)对角占优的矩阵之和,则网络是异步收敛的。所获结果推广了已有的结论。

关键词:离散 Hopfield 神经网络;收敛性;能量函数
中图分类号:TP183 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2002)03-0084-03

具有 n 个神经元的离散 Hopfield 神经网络(简称 DHNN),其拓扑结构可以由一个 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{n\times n}$ 和一个 n 维列向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)^{\mathrm{T}}$ 所唯一确定,并记为 $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$。若用 $x_i(t)$ 表示神经元 i 在时刻 t 所处的状态,并且只有两种:兴奋用 $x_i(t)=1$ 表示和抑制用 $x_i(t)=-1$ 表示,$t\in\{0,1,2,\cdots\}$。DHNN 的演化方程为:

$$x_i(t+1)=\mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j(t)+\theta_i\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\geqslant 0\\ -1, & 若\ x<0\end{cases}$$

若令 $\boldsymbol{X}(t)=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{n\times n}$ 则式(1)可以写成:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\mathrm{sgn}(\boldsymbol{WX}(t)+\boldsymbol{\theta})$$

设 $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$ 是一 DHNN,$\boldsymbol{N}$ 从初态 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 开始,经过一个有限的时刻之后,网络的输出不再发生变化,则称此网络处于收敛状态(或称稳定状态),并称此网络关于初始状态 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 收敛(或稳定)。对任何初态都收敛的网络称为网络是收敛的。若 $\boldsymbol{X}$ 是 DHNN $\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{\theta})$ 的一个收敛状态,则有 $\boldsymbol{X}=\mathrm{sgn}(\boldsymbol{WX}+\boldsymbol{\theta})$。有时也把满足该式的 $\boldsymbol{X}$ 称为网络 $\boldsymbol{N}$ 的稳定吸引子或简称为吸引子。若 DHNN 每次演化都是随机地选择一个神经元按式(1)进行,则称网络是异步(串行)的网络,若网络按异步方式演化是收敛的,则称该网络是异步收敛的。

若矩阵 $\boldsymbol{W}=(\bar{w}_{ij})_{n\times n}$ 满足 $\forall i$ 有 $w_{ii}\geqslant\sum_{j\neq i}|w_{ij}|$(或 $w_{ii}\geqslant\sum_{j\neq i}|w_{ji}|$),则称矩阵 $\boldsymbol{W}$ 是行(或列)对角占优的。

DHNN 的收敛性是一个非常重要的概念,它是网络各种应用的基础。目前,有关收敛性的结果有很多,文献[1~2]给出了一些网络收敛的条件,但主要考虑的是对称网络,而文献[3]研究了非对称网络的收敛性。本文在文献[1~6]的基础上进一步研究非对称 DHNN 在异步演化方式下的收敛性,并给出了几个新的异步稳定性条件,所获结果推广了原有的有关结论。

1 主要结果及其证明

文献[3]中给出了下面重要的结论:

结论 若 $\forall i\in I=\{1,2,\cdots,n\}$,有 $w_{ii}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}-w_{ji}|$,则网络(1)是异步收敛的[3]。

收稿日期:2001-02-15
作者简介:刘洪坤(1968-),男,山东微山人,讲师,硕士,主要从事数字化战场通信系统、神经网络等研究.

事实上,该结论中的矩阵 W 可以分解成两部分 $W_1=(w_{ij}^1)_{i,j\in I}$和 $W_2=(w_{ij}^2)_{i,j\in I}$,即 $W=W_1+W_2$,其中 $W_1=(w_{ij}^1)_{i,j\in I}$,$W_2=(w_{ij}^2)_{i,j\in I}$分别满足

$$w_{ij}^1=\begin{cases}0, & i=j\\ \frac{1}{2}(w_{ij}+w_{ji}), & i\neq j\end{cases}\qquad w_{ij}^2=\begin{cases}w_{ii}, & i=j\\ \frac{1}{2}(w_{ij}-w_{ji}), & i\neq j\end{cases}$$

显然 W_1 是主对角元素都非负(事实上全为 0)的对称矩阵,而 W_2 既是行又是列对角占优的特殊矩阵。特别地,若 $W_2=0$,则相应的结论是离散 Hopfield 网络最早的异步稳定性结论[1-2]。现在的问题是,如果矩阵 W 具有不限于以上的分解形式,但 $W=W_1+W_2$,那么当 W_2 是任意一个行(或列)对角占优的矩阵时,是否仍有相应的异步稳定性结论呢? 回答是肯定的。这也正是本文的主要结论。

定理 1　若 W 可以分解成 $W_1=(w_{ij}^1)_{i,j\in I}$和 $W_2=(w_{ij}^2)_{i,j\in I}$之和,即 $W=W_1+W_2$,且 W_1 是主对角元素都非负的对称矩阵,而 W_2 是列对角占优的特殊矩阵,则离散 Hopfield 网络(1)是异步收敛的。

证明　令　$$\varepsilon_i=\max\{\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j+\theta_i \mid \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j+\theta_i<0, x_j\in\{-1,1\}, j\in I\}\tag{2}$$

若式(2)中没有 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\{-1,1\}$ 使 $\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j+\theta_i<0$ 成立,则 ε_i可取为任何的负数。取 $\bar\theta_i=\theta_i-\frac{\varepsilon_i}{2}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则根据符号函数的性质,有

$$x_i(t+1)=\mathrm{sgn}(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(t)+\theta_i)=\mathrm{sgn}(\sum_{j=1}^n (w_{ij}^1+w_{ij}^2)x_j(t)+\bar\theta_i)\tag{3}$$

很明显,网络(3)的收敛性与网络(1)的收敛性完全相同。对于网络(3)定义能量函数如下:

$$E(t)=-\frac{1}{2}X^{\mathrm T}(t)W_1X(t)-X^{\mathrm T}(t)W_2X(t)-X^{\mathrm T}(t)\bar{\boldsymbol\theta}\tag{4}$$

则 $\Delta E(t)=E(t+1)-E(t)=$

$$\begin{aligned}&-\Delta X^{\mathrm T}(t)W_1X(t)-\frac{1}{2}\Delta X^{\mathrm T}(t)W_1\Delta X(t)-X^{\mathrm T}(t)\bar{\boldsymbol\theta}\\&-\Delta X^{\mathrm T}(t)W_2X(t)-X^{\mathrm T}(t+1)W_2\Delta X(t)-\Delta X^{\mathrm T}(t)\bar{\boldsymbol\theta}=\\&-\frac{1}{2}\Delta X^{\mathrm T}(t)W_1X(t)-\Delta X^{\mathrm T}(t)((W_1+W_2)X(t)+\bar{\boldsymbol\theta})-\Delta X^{\mathrm T}(t)W_2^{\mathrm T}X(t+1)=\\&-\frac{1}{2}w_{ii}^1(\Delta x_i(t))^2-\Delta x_i(t)(\sum_{j\in I}w_{ij}x_j(t)+\bar\theta_i)-\Delta x_i(t)\sum_{j\in I}w_{ji}^2x_j(t+1)\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\Delta X(t)=(\Delta x_1(t),\cdots,\Delta x_n(t))^{\mathrm T}=X(t+1)-X(t)$。很明显,在式(5)中,若 $\Delta x_i(t)=0$,则 $\Delta E(t)=0$;若 $\Delta x_i(t)\neq0$,则 $\Delta x_i(t)=2x_i(t+1)=-2x_i(t)$,且式(5)中的 $-\frac{1}{2}w_{ii}^1(\Delta x_i(t))^2\leqslant0$, $-\Delta x_i(t)(\sum_{j\in I}w_{ij}x_j(t)+\bar\theta_i)<0$,而 $-\Delta x_i(t)\sum_{j\in I}w_{ji}^2x_j(t+1)=-2x_i(t+1)\sum_{j\in I}w_{ji}^2x_j(t+1)\leqslant-2(w_{ii}^2-\sum_{j\neq i}|w_{ji}^2|)\leqslant0$。

因此,在式(5)中,若 $\Delta x_i(t)=0$,则 $\Delta E(t)=0$;若 $\Delta x_i(t)\neq0$,则 $\Delta E(t)<0$。这就证明了 $E(t)$是严格的能量函数,所以定理 1 是成立的。

定理 2　若 W 可以分解成 $W_1=(w_{ij}^1)_{i,j\in I}$和 $W_2=(w_{ij}^2)_{i,j\in I}$之和,即 $W=W_1+W_2$,且 W_1 是主对角元素都非负的对称矩阵,而 W_2 是行对角占优的特殊矩阵,则离散 Hopfield 网络(1)是异步收敛的。

证明　同定理 1 的证明,知网络(1)的收敛性与网络(3)的收敛性相同。对于网络(3)定义能量函数如下:

$$E(t)=-\frac{1}{2}X^{\mathrm T}(t)W_1X(t)-X^{\mathrm T}(t)\bar{\boldsymbol\theta}\tag{6}$$

则和式(5)的证明类似,可以证明

$$\Delta E(t)=-\frac{1}{2}w_{ii}^1(\Delta x_i(t))^2-\Delta x_i(t)(\sum_{j\in I}w_{ij}x_j(t)+\bar\theta_i)+\Delta x_i(t)\sum_{j\in I}w_{ij}^2x_j(t)\tag{7}$$

若 $\Delta x_i(t)\neq0$,则 $\Delta x_i(t)\sum_{j\in I}w_{ij}^2x_j(t)=-2x_i(t)\sum_{j\in I}w_{ij}^2x_j(t)\leqslant-2(w_{ii}^2-\sum_{j\neq i}|w_{ij}^2|)\leqslant0$。因此,在式(7)中,同式(5)的证明一样,若 $\Delta x_i(t)=0$,则 $\Delta E(t)=0$;若 $\Delta x_i(t)\neq0$,则 $\Delta E(t)<0$。所以定理 2 是成立的。

举例　网络 $N=(W,0)$,其中 $W=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$。显然网络是非对称的,并且 $w_{11}<\frac{1}{2}\sum_{j=1}^3|w_{1j}-w_{j1}|$。因

此,利用已有的相关结果,即文献[3]中的结果(见前面)无法判定网络的异步收敛性。但是如果将 W 分成 $W=W_1+W_2$,其中 $W_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,$W_2=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$。很显然,矩阵 W_1 是对称的,且主对角元素都是非负的,矩阵 W_2 是列对角占优的,满足定理 1 的条件,因此利用定理 1 知网络是异步收敛的。事实上,经检验知该网络确实是收敛的。网络状态图如图 1 所示,其中圆圈中的数字表示网络状态的十进位数,如 $6=(-1,1,1)^T$,$0=(-1,-1,-1)^T$等,而弧上的数字表示网络弧尾的状态按弧上的神经元演化而得到的箭头的状态。从图 1 中可以看出网络的收敛点有 4 个,$(-1,-1,-1)^T$,$(1,1,1)^T$,$(1,1,-1)^T$,$(-1,-1,1)^T$。其中$(1,-1,-1)^T$收敛到$(-1,-1,-1)^T$;$(-1,1,-1)^T$,$(-1,1,1)^T$收敛到$(1,1,1)^T$;而$(1,-1,1)^T$可能收敛到$(-1,-1,-1)^T$,也可能收敛到$(1,1,1)^T$。

2 结论

本文主要给出了一些非对称离散 Hopfield 网络在异步演化方式下的收敛性条件。所给结果推广了文献中已有网络的异步收敛性结果,并通过例子验证了其结果的实用性和正确性。对于定理 1 和定理 2 若所给出的条件用 βW_1 和 βW_2 分别代替 W_1 和 W_2 后仍然满足,则相应的结论同样是成立的,其中 $\beta=\text{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 是主对角元素都大于零的对角矩阵。结论这里略去。

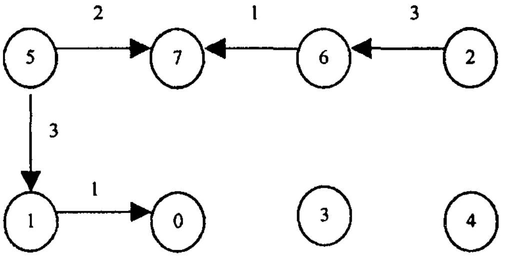

图 1 网络状态图

参考文献:

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems emergent collective computational abilities[J], Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1982,79(8):2554 - 2558.

[2] Bruck J, Goodman J W. A generalized convergence theorem for neural networks[J], IEEE Trans. Inform. Theory, 1988, 34(5):1089 - 1092.

[3] Xu Z B, Kwong C P. Global convergence and asymptotic stability of asymmetric Hopfield neural networks[J], J. Mathematical Analysis and Applications, 1995, 191(4):405 - 427.

[4] Lee D L. New stability conditions for Hopfield neural networks in partial simultaneous update mode[J], IEEE Trans. Neural Networks, 1999, 10(4):975 - 978.

[5] 廖晓昕,昌 莉,沈 轶. 离散 Hopfield 神经网络的稳定性研究[J]. 自动化学报, 1999,25(6): 721 - 727.

[6] 许 进,保 铮. 反对称离散 Hopfield 网络的稳定性理论[J]. 电子学报,1999,27(1):103 - 107.

(编辑:门向生)

Research on Convergence of Discrete Hopfield - Type Neural Networks in Serial Mode

LIU Hong - kun[1], MA Run - nian[2]

(1. Navy Engineering University, Wuhan 430033, China; 2. The Telecommunication Engineering Institute, Air force engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: This paper mainly studies the convergence of asymmetric discrete Hopfield neural network in serial mode and gives some convergence conditions. If the weight matrix can be decomposed into the sum of a symmetric matrix with non - negative diagonal elements and a diagonally row (column) dominant matrix, then the network is convergence in serial mode. The obtained results generalize the existing conclusions.

Key Words: discrete hopfield neural networks; convergence; energy function