

四元数下欧拉方程实时 R - K 法求解误差分析

许毛跃, 李嘉林, 张登成

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要:对定步长的龙格—库塔法用于欧拉方程的四元数法求解时所表现的巨大误差作了进一步的研究,发现方程组是良态的,同时在通常的飞行模拟仿真中,所取的步长也是能够满足方程组的绝对稳定区域所带来的步长限制,而此误差产生的原因主要在于累积误差。

关键词:四元数;条件数;刚性比;累积误差

中图分类号:TP391.9 **文献标识码:**A **文章编号:**1009 - 3516(2002)02 - 0060 - 04

描述飞机姿态的欧拉角是按欧拉概念定义的,故亦称欧拉角。俯仰角 ϑ 是体轴系的纵轴与水平面间的夹角,滚转角 γ 是飞机对称面与通过体轴系纵轴的铅垂面之间的夹角,偏航角 ψ 是体轴系纵轴在水平面上的投影与地轴系轴 Ox_g 间的夹角。在飞机的全量运动方程组中,通常是用如下称为欧拉方程^[1]的一组方程来求解。

$$\psi = (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) / \cos \vartheta; \vartheta = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \gamma = \omega_x - \psi \sin \vartheta \quad (1)$$

显然,在式(1)中, $\cos \vartheta = 0$ 时, γ 和 ψ 为无穷大,方程组无法求解,这就是欧拉方程的奇异性。

欧拉方程的奇异性,是广泛采用欧拉角概念的航空航天界中姿态控制和飞行模拟的共性的难题,解决欧拉方程奇异性具有普遍的现实意义。

克服欧拉方程奇异性的方法有单欧法、双欧法和四元数法等。单欧法采用死区定值,缺陷明显。双欧法求解效果较好,所以在某型战斗机的工程飞行模拟器中进行了使用;四元数法只有采用精度较高或变步长的计算方法时,才能求解得比较精确,采用实时标准龙格—库塔法求解的结果误差大,因而四元数法无法在实时情况下使用。本文对此进行了进一步研究,找出问题之所在,以便对此有更全面和深入的了解。

1 四元数法的简单介绍

四元数是由四个元素组成的超复数,其解析表达式为^[2]

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (2)$$

式中, i, j, k 为虚数单位,规定它们服从下列运算法则:

$$ii = jj = kk = -1; ij = -ji, jk = -kj, ki = -ik; ij = k, jk = i, ki = j \quad (3)$$

四元数下的坐标变换在此不再赘述,而直接给出四元数与欧拉角的关系表达式以及四元数分量的微分方程式。见式(4)、式(5)。

式中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 是机体旋转角速度。

$$\begin{cases} \sin \vartheta = 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) \\ \cos \vartheta \sin \gamma = -2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ \cos \vartheta \cos \gamma = q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \\ \tan \varphi = -\frac{2(q_1 q_3 + q_0 q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

对于给定的机体旋转角速度和四元数初值(由初始姿态角确定),求解微分方程式(5)可求得 q_0, q_1, q_2, q_3 , 代入式(4)即可求得姿态角如下:

$$\begin{cases} \vartheta = \arcsin[2(q_1q_2 - q_0q_3)] \\ \gamma = \arctan[-2(q_2q_3 + q_0q_1)/(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)] \\ \psi = \arctan[-2(q_1q_3 + q_0q_2)/(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)] \end{cases} \quad (6)$$

通常 $\vartheta \in [-90^\circ, 90^\circ], \psi \in [-180^\circ, 180^\circ], \gamma \in [-180^\circ, 180^\circ]$ 。

2 四元数下方程组的研究

下面将从条件数、刚性比和累积误差三个方面进行分析,条件数反应了方程组的计算结果对出事数据小扰动的敏感性;刚性比反应了方程组对算法及其积分步长等苛刻要求的程度,而累积误差也是一个不容忽视的问题。

2.1 条件数方面

对矩阵 A , 其条件数表达式为 $\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$, 通常范数都取 2, 即 $\|A\| = \|A\|_2 = \lambda_1^{\frac{1}{2}}$, 其中 λ_1 为 $A^{-1}A$ 的最大特征值。条件数可认为是方程组的相对误差对数据的相对误差的一个放大倍数, 当条件数的绝对值很大时, 方程组是病态的; 当条件数较小(接近 1)时, 方程组是良态的; 当条件数等于 1 时, 方程组是优态的^[3]。

对微分方程式(2), 可将其变为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -\omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

以 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \pi$ 和 $\omega_x = \pi/3$ 为例, 通过计算可知, 对于前者 $\|A\|_2 = 0.6366, \|A^{-1}\|_2 = 1.5708, \text{cond}(A) = 0.9999$; 对于后者, $\|A\|_2 = 1.6735, \|A^{-1}\|_2 = 0.5281, \text{cond}(A) = 0.9999$, 这表明方程组是优态的, 以其它机体旋转角速度代入计算后也获得了同样的结果。

2.2 刚性问题方面

令 A 为方程组的系数矩阵, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m, \text{Re}(\lambda_i) < 0$, 则将刚性比 $S(x)$ 定义为 $S(x) = \max|\text{Re}(\lambda_i)| / \min|\text{Re}(\lambda_i)|$, 在方程组稳定的情况下, 刚性比越大, 求解区间越长, 一定步长条件下, 将耗费相当可观的时间, 若用通常的求解方法求解刚性方程组, 由于误差的累积, 往往会淹没真值, 宜用绝对稳定性较好的方法求解, 如隐式 R-K 法。

对所需求解的方程组(5)或(7), 用 Mathematics 可求得四个特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}, \lambda_2 = \lambda_4 = \frac{1}{2}\sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2} \quad (8)$$

相应的特征向量为

$$\alpha_1 = \left\{ -\frac{-\omega_x\omega_y + \omega_z\sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, -\frac{-\omega_x\omega_z - \sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, 0, 1 \right\} \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \left\{ -\frac{-\omega_x\omega_z - \omega_y\sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, -\frac{-\omega_x\omega_y - \sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, 1, 0 \right\} \quad (10)$$

$$\alpha_3 = \left\{ -\frac{-\omega_x\omega_y - \omega_z\sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, -\frac{-\omega_x\omega_z - \sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, 0, 1 \right\} \quad (11)$$

$$\alpha_4 = \left\{ -\frac{-\omega_x\omega_z + \omega_y\sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, -\frac{-\omega_x\omega_y - \sqrt{-\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2}}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, 1, 0 \right\} \quad (12)$$

对特征根, 当机体旋转角速度不为零时, 其各特征值的实部为零, 故其刚性比的确定比较困难, 不能判定是否存在刚性问题; 对特征向量, 可判断它们是线性无关的, 从而可知该方程组的解是稳定的^[3], 即该方程组是

稳定的。在此前提下,结合所求得特征根可知,所求解的方程组系数矩阵特征根的通式可用 $\lambda_i = a_i i$ 来表示,其中 a_i 为实数,用标准的 R-K 法求解时,将特征根通式带入该单步法的绝对稳定区域限制表达式:

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} \right| < 1 \tag{13}$$

可求得定步长标准 R-K 法具有数值稳定性时,步长应满足 $-2\sqrt{2}/|\alpha_i| < h < 2\sqrt{2}/|\alpha_i|$,以 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \pi$ 和 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \pi/3$,及 $\omega_x = \omega_y = \pi \sin(\pi t)/4, \omega_z = \pi$ 为例由特征根通式可知, $|\alpha_i|_{\max} = 3\sqrt{2}\pi/8$,而 $h > 0$,故 $0 < h < \frac{16}{3\pi}$,即 $0 < h < 1.7$,对飞行模拟来讲,为了实现模拟的实时性,一般 h 的取值都小于 0.1,故用定步长标准 R-K 法求解此微分方程组时,所取步长能够满足方程组的绝对稳定区域所带来的步长限制。亦即方程组不存在刚性问题,方程组不是病态的。

2.3 累积误差问题

用标准的 R-K 法求解时,用主元消去法求解方程组时的误差为^[4]

$$\|\delta A\| \leq \left[\sqrt{\frac{2}{3}}(n - \frac{1}{4})^2 + 2\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}(n^{\frac{1}{2}} + 0.44) + 0.33 \right] \gamma \|A\|_{F\mu} \tag{14}$$

由文献[4]可知, $\mu = \frac{1}{2}\beta^{l-1}, \gamma = \frac{1}{n} = 2 \times (2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 4.689\ 955$

求解四元数方程组的过程中^[4-5],运算时的误差主要由算术误差,截断误差,相对误差等组成,其中占主导作用的是算术误差,以 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega_z = \pi$ 为例,此时四元数方程变为

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ -\pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

则近似有

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{8}h^2\pi^2 + \frac{1}{384}h^4\pi^4 & 0 & 0 & \frac{1}{2}h\pi + \frac{1}{48}h^3\pi^3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{8}h^2\pi^2 + \frac{1}{384}h^4\pi^4 & \frac{1}{2}h\pi + \frac{1}{48}h^3\pi^3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}h\pi + \frac{1}{48}h^3\pi^3 & 1 - \frac{1}{8}h^2\pi^2 + \frac{1}{384}h^4\pi^4 & 0 \\ -\frac{1}{2}h\pi + \frac{1}{48}h^3\pi^3 & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{8}h^2\pi^2 + \frac{1}{384}h^4\pi^4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

为简化计算,取 $h = 0.01$,则系数矩阵变为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0 & 0.0157 \\ 0 & 0.9999 & 0.0157 & 0 \\ 0 & -0.0157 & 1.0001 & 0 \\ -0.0157 & 0 & 0 & 1.0001 \end{bmatrix} \tag{17}$$

设初始误差为 0,计算中的相对误差、截断误差不计。计算机浮点计算取 7 位有效数字则^[4]

$$Q_n + \delta Q_n = (A + \delta A)(Q_{n-1} + \delta Q_{n-1}) \tag{18}$$

$$\|\delta A\| \leq \left[\sqrt{\frac{2}{3}}(n - \frac{1}{4})^2 + 2\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}(n^{\frac{1}{2}} + 0.44) + 0.33 \right] \gamma \|A\|_{F\mu} \tag{19}$$

故

$$\|\delta A\| \leq 1.28 \times 10^{-4} \tag{20} \quad Q_n = (A + \delta A)^n Q_0 \tag{21}$$

所以,

$$\delta Q_n \leq (A + \delta A)^n Q_0 - A^n Q_0 \tag{22}$$

$$\|\delta Q_n\| = \|1.0003^n - 1.0002^n\| \|Q_0\| \tag{23}$$

角转化过程中的误差传递分析如下:用 $\|\vartheta\| / \|Q\|$ 表示 ϑ 对自变量扰动的敏感度,则 $\|\vartheta\| / \|Q\|$ 在零点处为 1,在 ± 90 处为 ± 90 ,且单调递增,记 $\vartheta = \pi\vartheta/180$,则误差为

$$\vartheta' + \delta\vartheta' = \arcsin[2(q_1q_3 - q_0q_3) + \delta qq] \tag{24}$$

而 $\|\delta qq\| \leq 2(|q_0| + |q_1| + |q_2| + |q_3|) \|\delta Q_n\|$, 所以将 $\sin(\vartheta' + \delta\vartheta') = 2(q_1q_2 - q_0q_3) + \delta qq$ 用泰勒级数近似展开后可得:

$$\|\delta\vartheta\| \leq \frac{180}{\pi} \times 2(|q_0| + |q_1| + |q_2| + |q_3|) \|\delta Q_n\| / (1 - \vartheta'^2/2 + \vartheta'^4/24) \tag{25}$$

对 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \pi$, 有: $\|Q_0\| = 1$,

$$\|\delta\vartheta\| \leq \frac{180}{\pi} \times 2 \|\delta Q_n\| (|q_0| + |q_1| + |q_2| + |q_3|) / (1 - \vartheta'^2/2 + \vartheta'^4/24) \tag{26}$$

取初值 $Q = [1, 0, 0, 0]^T$, 以 $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \pi$ 为例, 可算得 $t = 0.0$ 时, $\delta\vartheta = 0^\circ$; $t = 3.5$ 时, $\delta\vartheta = 19.76^\circ$; $t = 5.0$ 时, $\delta\vartheta = 0.58^\circ$; $t = 7.5$ 时, $\delta\vartheta = 27.82^\circ$; $t = 9.5$ 时, $\delta\vartheta = 31.68^\circ$ 。由图 1 可知, 这些理论误差与实际误差十分吻合 (衰减的曲线为四元数法所算得, 不衰减的为双欧法所算得)。从而可知: 定步长的标准 R-K 法用于欧拉方程的四元数法产生巨大误差的原因在于累积误差。由图 2 示可看出累积误差的直接表现, 即使得单位四元数的前提条件 (四个元素的平方和等于 1) 不能得到满足, 而是呈逐渐减小的态势。

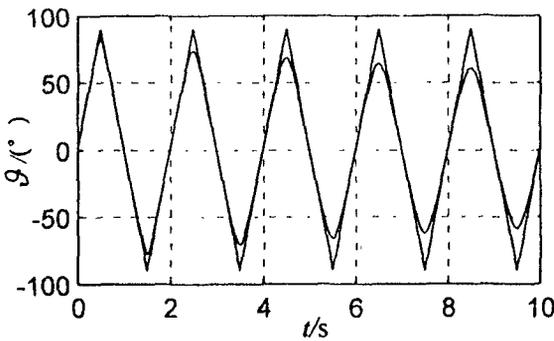


图1 俯仰角 ϑ 的模拟变化曲线

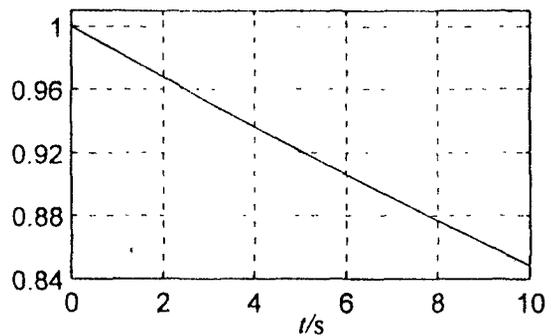


图2 单位四元数的“单位”变化曲线

3 结论

定步长的标准 R-K 法用于欧拉方程的四元数法时, 方程组是良态的, 同时方程组在刚性比方面也是不存在问题的, 而产生很大误差的根源在于累积误差, 这也使得单位四元数的前提不能得到满足, 从而导致实时标准龙格-库塔法不能用于欧拉方程的四元数法。

参考文献:

- [1] 肖亚伦. 飞行器运动方程[M]. 北京: 航空工业出版社, 1987.
- [2] 陈廷楠, 张登成. 双欧法和四元数法的应用比较[J]. 飞行力学, 1996, 14(4): 59-64.
- [3] BRAUN M. 微分方程及其应用[M]. 张鸿林. 北京: 人民教育出版社, 1980.
- [4] 唐珍. 舍入误差分析引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- [5] 费业泰. 误差理论与数据处理[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.

(编辑: 姚树峰)

Analysis of the Error Result from Single Step of Runge - Kutta for the Euler Equation with Quaternion Method

XU Mao - yue, LI Jia - lin, ZHANG Deng - cheng

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: This paper makes a further study of the large error which appears in solving the Euler equation with single step of Runge - Kutta in Quaternion method. Through the study, it is found that the equation is fine and simultaneously the step used in usual flight simulation can meet the command of step determined by the absolutely stable domain of the equation, and the main source of the error lies in cumulative errors.

Keywords: quaternion; condition number; stiff degree; cumulative error