

# 多尺度小波变换在自适应滤波中的应用

刘昌云, 陈长兴, 贾 贵  
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

**摘 要:**分析了小波变换的基本理论和小波变换的多尺度分析,并根据多尺度小波变换的多分辨率特性,提出基于多尺度小波变换的自适应滤波,构造了其仿真模拟图,并对其进行了仿真。通过LMS自适应滤波和多尺度小波变换自适应滤波的仿真图对比,表明该方法可行。

**关键词:**小波变换;滤波;多尺度分析;自适应

**中图分类号:**TN919 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2002)02-0050-03

小波分析具有以下两个最大的特点:一是“自适应性”,它能根据分析对象自动调整有关参数;二是“数学显微镜性质”,它能根据观察的对象自动“调焦”,以取得人们满意的最佳效果<sup>[1]</sup>。实质上小波变换是一组高通、低通、带通滤波器组的组合,其滤波器具有自适应性,即:分析检测高频分量时,时间窗口自动变窄、频率窗口增加;分析检测低频特性时,时间窗口自动变宽、频率窗口减少,或者说:其滤波特性的品质因数  $Q$  为

$$Q = \omega_0/BW = \omega_{\psi a,b}^0/2\sigma_{\psi a,b} = \omega_{\psi 1,0}^0 a/2Q_{\psi 1,0} a = const$$

$Q$  恒为一常数,因而小波相当于一个恒  $Q$  滤波器。

## 1 小波分析理论

小波分析是傅氏分析的重大突破,具有广泛的应用价值,有关小波的基本概念如下<sup>[1]</sup>:设  $\psi(t)$  为允许小波,其离散二进制小波函数族  $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)\}$ , 即有:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n), m, n \in \mathbb{Z}$$

其中  $m$  称为尺度参数,  $n$  称为平移参数。

并设  $f(x) \in L^2(R)$ , 其离散小波变换定义为

$$\langle f, \psi_{m,n}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{m,n}(t)} dt \tag{1}$$

其意义如下:通过选取适应的放大倍数  $2^{-m/2}$ , 在一个特定的位置研究一个函数或信号过程,然后平移到另一个位置继续研究;如放大倍数放大,也就是尺度变小,可按小步长移动一个距离,反之亦然。

其相应的信号重构公式:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{m,n}(t) \rangle \psi_{m,n}(t) \tag{2}$$

作为小波变换须满足以下几个基本条件:

1) 小波容许条件,即具有  $K$  阶消失矩:  $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

2) 小波完全重构条件:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$

3) 稳定性条件:  $0 < A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi(2^{-j}\omega)| \leq B < \infty$

### 2 小波变换的多尺度分析

设  $\{V_j\}$  是一给定多尺度分析,  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  分别是相应的尺度函数和小波函数, 记:

$$S_{2j}f(t) = f(t) * \varphi_{2j}(t) \quad , \quad W_{2j}f(t) = f(t) * \psi_{2j}(t)$$

有:

$$W_{2j}f(t) = W_{2^{j-1}}f(t) * G_{j-1} \quad , \quad S_{2j}f(t) = S_{2^{j-1}}f(t) * H_{j-1} \tag{3}$$

式(3)即为小波变换的快速算法( $H, G$  分别是  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  对应的滤波器), 其结构框图如图 1 所示<sup>[3]</sup>。

把离散的信号序列  $f(n)$  分别通过低通滤波器  $h(n)$  和高通滤波器  $g(n)$ , 把  $f(n)$  分解为四个序列  $S_{11}f(n)$ 、 $S_{12}f(n)$  和  $W_{11}f(n)$ 、 $W_{12}f(n)$ 。再把  $S_{11}f(n)$ 、 $S_{12}f(n)$  和  $W_{11}f(n)$ 、 $W_{12}f(n)$  通过低通滤波器  $h(-n)$  和高通滤波器  $k(n)$  而实现信号的重构  $f(n)$ 。 $\uparrow 2$  表示上采样,  $\downarrow 2$  表示下采样。这些滤波器组应满足的条件:

$$|H(\omega)|^2 + G(\omega)K(\omega) = 1$$

$$\varphi(2\omega) = e^{-j\omega/2}H(\omega)\varphi(\omega)$$

$$\psi(2\omega) = e^{-j\omega/2}G(\omega)\varphi(\omega)$$

$$\Gamma(2\omega) = e^{-j\omega/2}k(\omega)\varphi(\omega)。$$

用数学表达式表示的信号处理过程如下<sup>[1]</sup>

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_{m_0, n} \rangle \varphi_{m_0, n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{m, n} \rangle \psi_{m, n}(t)$$

尺度函数  $\varphi(t)$  应满足:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$ 。上式右边的第一部分用于提取满变轮廓和边缘一类的特征; 第二部分由小波函数用于在所有尺度上作细化处理。尺度因子  $m_0$  是根据信号性质和所要求的信息内容而事先选定的。

Mallat 在多尺度分析的基础上, 给出了计算  $\langle f, \varphi_{m_0, n} \rangle$  和  $\langle f, \psi_{m, n} \rangle$  的快速方法——Mallat 算法, 其算法优点是不需要知道  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  的解析式, 且易于实现。

### 3 基于多尺度小波变换的自适应滤波

自适应滤波是在不知道信号的具体特征时, 利用前一时刻的滤波器参数, 自动调节该时刻的滤波器参数, 以适应信号和噪声未知的或随时间变化的统计特性, 从而实现最优滤波<sup>[4]</sup>。

设一信号  $d(k) = x(k) + n(k)$ , 其中  $x(k)$  是有用信号,  $n(k)$  是一噪声信号, 在进行仿真过程中不考虑  $x(k)$  和  $n(k)$  的相关性。小波选用 Harr 小波, 根据分析选取 1~6 级尺度下的分量作为自适应滤波的参考输入信号  $X = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_1]$ , 其中  $x_j (j = 1, \dots, n)$  是二进制小波变换的参数。权重矢量  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , 则可得:

输出信号为  $y(k) = W^T X$  与输入信号  $d(k)$  间的误差:  $e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - W^T X$ 。由 LMS 算法逐次更新权重  $W$ :  $W(k+1) = W(k) + 2\mu e(k) X$ ,  $\mu$  为步长因子, 其影响  $W$  的收敛性<sup>[4]</sup>。

当均方误差  $E[e^2(k)]$  达最小时, 输出  $y(k)$  将趋近信号  $x(k)$ 。其滤波流程如图 2 所示。

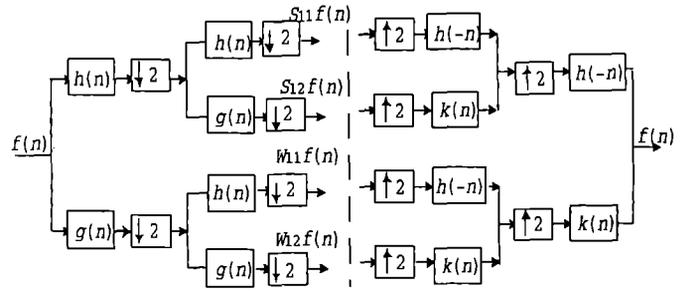


图 1 小波变换的多尺度分析结构框图

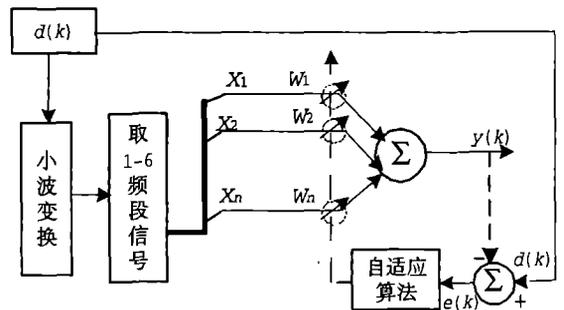


图 2 多尺度小波变换自适应滤波流程图

## 4 仿真计算

### 4.1 小波的选择

小波应满足的最基本条件<sup>[5]</sup>:衰减性、波动性、容许性;此外,还应考虑:时间-频率窗的大小,即时域和频域的局部性程度——正则性条件;计算的复杂性和有效性;实现的简单性;小波本身的特性(如光滑性程度、小波的对称性和反对称性、支撑集的大小等)。基于此,选取 Harr 小波作为小波基。

### 4.2 仿真结果

选用的受污染正弦信号如图 3,采用两种方法对污染信号进行滤波——即信号的重构:一是自适应滤波法,采用文献[4]中介绍的 LMS 滤波;二是多尺度小波变换自适应滤波法,采用的方法如上所介绍。运用以上介绍的方法对两种信号进行仿真实验,信号重构结果如图 4、图 5 所示。其中图 4 为用自适应滤波法重构的信号,图 5 为用多尺度小波变换自适应滤波法重构的信号。

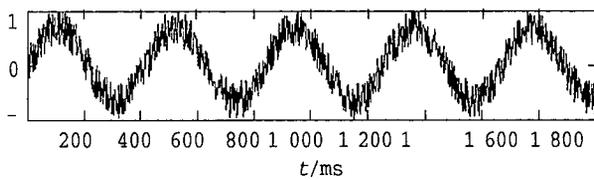


图 3 受污染的原始信号

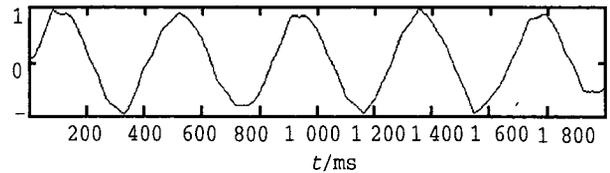


图 4 自适应滤波法重构信号

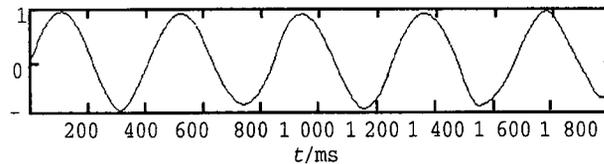


图 5 多尺度小波变换自适应滤波法重构信号

从仿真结果可以看出,多尺度小波变换自适应滤波能更好的恢复信号,并且具有比自适应滤波更高的去噪声能力。

### 参考文献:

- [1] 李建平. 小波分析与信号处理, 理论、应用及软件实现[M]. 重庆:重庆出版社,1997.
- [2] 卢传发,张剑云. 小波变换在噪声抑制中的应用研究[J]. 解放军电子工程学院学报, 2000,19(1):12-16.
- [3] Chen C F, Hsiao C H. Wavelet approach to optimising dynamic systems[J]. IEE Proc. Control Theory Appl, 1999, 146(2): 213-219.
- [4] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京:清华大学出版社,1995.
- [5] 王军锋,宋国乡. 小波变换的自适应滤波算法[J]. 西安电子科技大学学报,2000,27(1):21-24.

(编辑:田新华)

## Application of Multiscale Wavelet Transform in Adaptive Filter

LIU Chang - yun, CHEN Chang - xin, JIA Gui

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

**Abstract:** The basic theory and the multiscale of the wavelet transform are analysed. According to the characteristics of the multiscale wavelet transform, the adaptive filter based on the multiscale wavelet transform is presented and the simulation drawing is constructed. By comparing the simulative drawings of the LMS adaptive filter the with adaptive filter of the multiscale wavelet transform, it is concluded that this method is feasible.

**Key words:** wavelet transform; filter; multiscale analysis; adaptive