

基于线性二次型高斯(LQG)理论的最优制导规律

雷虎民¹, 梁颖亮², 杨强国³

(1. 西安交通大学 电信学院, 陕西 西安 710049; 2. 空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800; 3. 陕西新华书店, 陕西 西安 710003)

摘要:以线性二次型高斯(LQG)理论为基础,研究一种最小化末端脱靶量和拦截周期内控制能量消耗的具有可变有效导航比的LQG最优制导规律。分析了这种制导规律的有效导航比及其在战术导弹上的应用。应用伴随方法对这种制导规律进行制导性能仿真计算。结果表明:这种制导规律的控制精度高、机动过载要求小。

关键词:线性二次型高斯;最优制导规律;比例导引规律;战术导弹

中图分类号:V448 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2002)02-0027-04

所谓线性二次型高斯(Linear Quadratic Gaussian - LQG)问题是指系统动力学方程是线性的,性能指标函数是二次型的,而所研究问题的随机干扰具有高斯密度函数。寻的制导问题的目的就是要最小化末端脱靶量和拦截周期内的控制能量消耗,并且限制在飞行期间的状态变量值。本文研究一种最小化末端脱靶量和拦截周期内控制能量消耗的LQG最优制导规律,以LQG理论为基础采用改进的简化方法推导了具有可变有效导航比的LQG最优制导规律^[1-4]。

1 导弹制导系统纵向平面的数学模型建立

在战术导弹制导控制系统中,一般都是把三个互相垂直的控制通道分开设计,每个控制通道构成相对独立的制导控制系统,这样可以将一个复杂的导弹制导控制问题分为三个互相垂直的控制通道。因此,为使问题分析简单,我们仅研究导弹在纵向平面内的运动。在纵向平面,导弹和目标的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} y_r &= v_{ry} \\ v_{ry} &= a_{ly} - a_{my} \\ a_{ly} &= \lambda_y a_{ly} + w_{ly} \\ a_{my} &= -\omega_{ay} a_{my} + \omega_{ay} u_y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: y_r 为导弹与目标的相对距离; v_{ry} 为导弹与目标的相对速度; a_{ly} 为目标机动加速度; a_{my} 为导弹机动加速度; w_{ly} 为作用于目标的白噪声; u_y 为导弹的指令加速度控制信号; λ_y 为目标机动频率; ω_{ay} 为导弹纵向平面飞控系统带宽。将式(1)写成矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} y_r \\ \dot{v}_{ry} \\ a_{ly} \\ a_{my} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{ay} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ v_{ry} \\ a_{ly} \\ a_{my} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{ay} \end{bmatrix} u_y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{ly} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

或:
$$Y = AY + Bu_y + W_y \quad (3)$$

$$\text{式中: } Y = \begin{bmatrix} y_r \\ v_{ry} \\ a_{ly} \\ a_{my} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{ay} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{ay} \end{bmatrix}, \quad W_{ly} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{ly} \\ 0 \end{bmatrix}$$

导引系统的二次型性能指标函数为

$$J = \frac{1}{2} Y^T(t_f) C Y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [Y^T(t) Q Y(t) + u_y(t) R u_y(t)] dt \quad (4)$$

$$\text{式中: } C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = 0,$$

2 用极大值原理求最优控制 $U(t)$

$$\text{作哈密尔顿函数: } H = \frac{1}{2} (Y^T Q Y + U^T R U) + \lambda^T (A Y + B U) \quad (5)$$

$$\text{对于最优控制,要求: } \frac{\partial H}{\partial U} = R U + R^T \lambda = 0 \quad (6)$$

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -Q Y - A^T \lambda \quad (7)$$

式中 λ 为辅助变量,

$$\lambda(t_f) = C Y(t_f)$$

由式(6)得:

$$U(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (8)$$

设伴随方程式(7)的解为

$$\lambda(t) = P(t) Y(t) \quad (9)$$

则:

$$U(t) = -R^{-1} B^T P Y \quad (10)$$

$$Y = A Y - B R^{-1} B^T P Y \quad (11)$$

由式(7)和(9)可得:

$$\lambda = P Y + \dot{P} Y = -Q Y - A^T \lambda \quad (12)$$

将式(9)和式(11)代入式(12),经整理后可得:

$$P + P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (13)$$

对于所有的非零 $Y(t)$ 值上式都应成立,因此 $Y(t)$ 前面括弧内的项应等于零,即:

$$P + P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

因此:

$$P = -P A - A^T P + P B R^{-1} B^T P - Q \quad (14)$$

上式即为矩阵里卡提(Riccati)方程,终端条件为 $P(t_f) = C$

经推导可得最优控制为

$$U^* = \frac{\Lambda}{t_{go}^2} [1, t_{go}, D(t_{go}, \lambda_y), -D(t_{go}, \omega_{ay})] \hat{Y} \quad (15)$$

$$\text{式中 } \Lambda = T^2 (e^{-T} - 1 + T) \left(-\frac{1}{2} e^{-2T} - 2e^{-T} + \frac{1}{3} T^3 - T^2 + T + \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (16)$$

$$D(t_{go}, \lambda_y) = \frac{1}{\lambda_y^2} (e^{-T_i} - 1 + T_i), T_i = \lambda_y \Delta t \quad (17)$$

$$D(t_{go}, \omega_{ay}) = \frac{1}{\omega_{ay}^2} (e^{-T} - 1 + T), T = \omega_{ay} t_{go} \quad (18)$$

3 有效导航比的变化规律

应用 LQG 控制理论推导出使 J 为最小的最优制导规律,其有效导航比为 Λ 。由式(16)知,有效导航比

Λ 是剩余飞行时间 t_{go} 和导弹飞控系统带宽 ω_{ay} 的函数。在导弹拦截目标过程中,剩余飞行时间 t_{go} 由最大值向零变化,因此有效导航比 Λ 是时变的。有效导航比 Λ 随 t_{go} 和 ω_{ay} 的变化规律如图 1 所示。

由图 1 可以看出,在确定的拦截时刻,导弹飞控系统带宽 ω_{ay} 决定了有效导航比幅值的大小。随着带宽的增加,有效导航比最优值由大向小变化。而在系统带宽一定的情况下,有效导航比随 t_{go} 最优地变化。当 t_{go} 很大时, Λ 值接近常值 3,这类似于比例型导引形式。在碰撞拦截点,即 t_{go} 为零时,有效导航比 Λ 减小为零。这是这种规律区别于比例导引(PN)的一个显著特点。正是这种时变有效导航比使得 LQG 最优制导规律有效地克服了常值增益 PN 规律末端失稳的缺点。

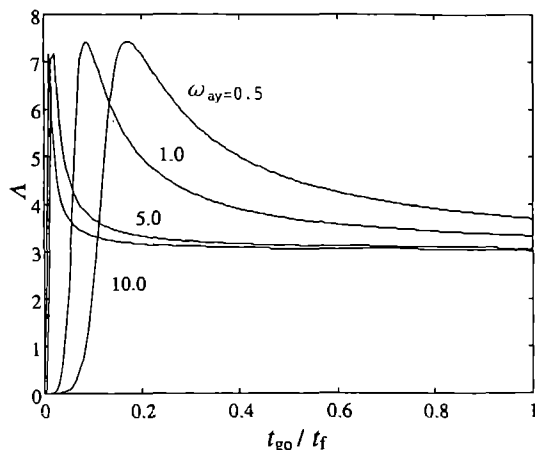


图 1 有效导航比变化规律

4 LQG 最优制导规律在战术导弹上的应用

式(15)可以写成下列形式:

$$U_y = c_1 \hat{y}_r + C_2 \hat{v}_{ry} + C_3 \hat{a}_{ly} + C_4 \hat{a}_{my} \tag{19}$$

其中: $C_1 = \Lambda / t_{go}^2$, $C_2 = \Lambda / t_{go}$, $C_3 = \Lambda D(t_{go}, \lambda_y) / t_{go}^2$, $C_4 = -\Lambda D(t_{go}, \omega_{ay}) / t_{go}^2$

主动式雷达导引头通常能够测量得到视线角速率 q_y , 相对距离 R_{lm} 和相对速度 V_c 信号。当取初始拦截时刻的导弹目标之间的视线方向为参考方向,则由于目标机动、导弹前置角误差等因素产生的视线角 q 、较小,因此:

$$\hat{y}_r = R_{lm} \hat{q}_y, \quad \hat{v}_{ry} = R_{lm} \hat{\dot{q}}_y \tag{20}$$

实现这种制导规律的控制器的结构如图 2 所示,这里目标机动加速度 a_{ly} 可以通过卡尔曼滤波器得到。

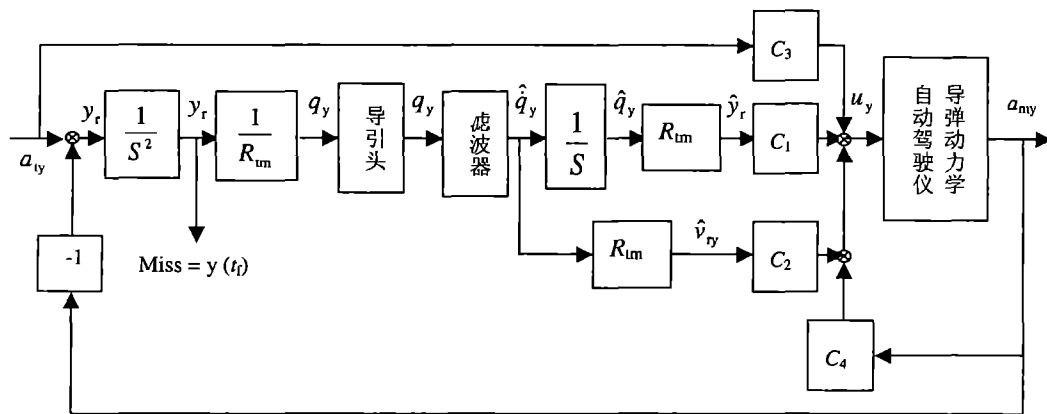


图 2 最优制导控制器

5 仿真算例

为了说明 LQG 最优制导规律控制效果并与传统的 PN 规律相比较,我们采用简化的制导系统数学模型。因此,设导弹动力学和自动驾驶仪系统用时间常数为 T_s 的一阶环节表示;导引头系统用一阶微分环节;滤波器为低通滤波器,用时间常数为 T_f 的一阶环节表示。在图 2 中,经低通滤波器得到视线角速率 \dot{q}_y 的估计值 $\hat{\dot{q}}_y$,由式(20)重构 \hat{y}_r 和 \hat{v}_{ry} 信号。利用图 2 所示的 LQG 最优制导规律控制器和简化的制导系统数学模型进行数字仿真,并与 PN 规律的控制效果进行比较。

由于这种简化的制导系统为线性系统,因此可以应用伴随方法进行制导性能仿真比较。伴随方法的优

点是在一次仿真运行中即可得到所有拦截时间每一干扰因素造成的准确脱靶量。因目标机动产生的脱靶量可以得到,导弹前置角误差影响造成的脱靶量可以得到,其它的误差源造成的脱靶量也可以在这次仿真运行中得到。

当目标机动加速度为 $10g$ 时,得到 LQG 最优制导规律的控制精度如图 3 所示,指令加速度幅值如图 4 所示。图中横坐标为剩余飞行时间值,图 3 纵坐标为均方根脱靶量,图 4 纵坐标为导弹机动过载。我们也仿真了 PN 规律的控制效果,并在同一曲线图中对比给出。仿真中取 $T_a = 0.5 \text{ s}$, $T_1 = 0.06 \text{ s}$ 。

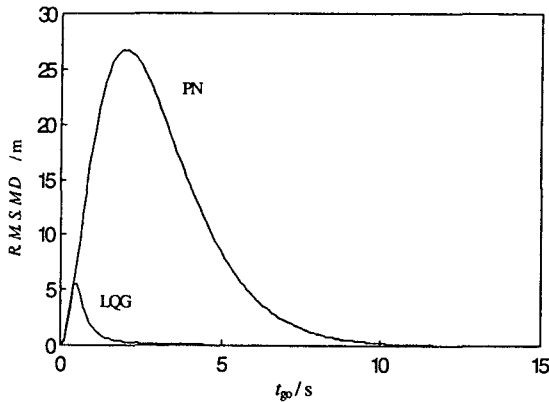


图 3 两种制导规律的控制精度比较

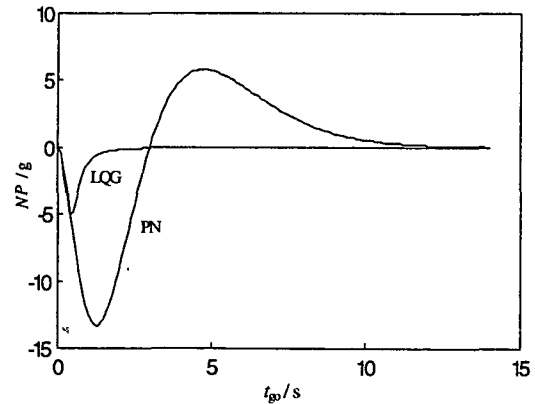


图 4 两种制导规律的指令加速度比较

由仿真结果可以看出,LQG 最优制导规律在攻击大机动目标时,其控制精度要比 PN 规律的控制精度高得多。其指令加速度过载要求也比 PN 规律的过载要求小得多。也就是说,这种制导规律对导弹的机动过载要求比 PN 规律低很多。另外,当导弹具有充足的机动时间时,两种制导规律都有良好的制导效果,这个结论也是与实际情况完全吻合的。

参考文献:

- [1] 雷虎民. 战术导弹最优复合制导规律研究及其应用[D]. 西安:西北工业大学,1999.
- [2] 蔡林留. 飞弹导引控制系统设计、分析与模拟[M]. 台湾:台湾天工书局发行,1989.
- [3] Paul Zarchan. Tactical and Strategic Missile Guidance (Second Edition) [M]. Washington, America; Published by AIAA Inc., 1994.
- [4] Ching - Fang Lin. Modern Navigation, Guidance, and Control Processing [M]. London, England :Prentice Hall Press, 1995.

(编辑:田新华)

An Optimal Guidance Law Based on Linear Quadratic Gaussian (LQG) Theory

LEI Hu - min¹, LIANG Ying - liang², YANG Qiang - guo³

(1. Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China; 3. Xinhua Bookshop of Shaanxi, Xi'an 710003, China)

Abstract: Based on linear quadratic Gaussian (LQG) theory, this paper shows a study of a LQG optimal guidance law that minimizes the terminal miss distance and control energy consumption within the intercepting period. This paper also gives an analysis of the law's effective navigation ratio and these ratio's applications to the tactical missiles. The results obtained by using adjoint methods show that the optimal LQG guidance law has an advantage over the traditional one in control accuracy and maneuver overload.

Keywords: linear quadratic Gaussian (LQG); optimal guidance law; proportional navigation (PN); tactical missile