

基于图论的离散 Hopfield 网络稳定性研究

马润年, 杨友社

(空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

摘要:以图论为工具,主要对连接权矩阵为对角分块形式的离散 Hopfield 神经网络的稳定性进行了研究。通过构造网络状态图证明了它的稳定性完全可由对角块为连接权矩阵的 Hopfield 网络的稳定性来确定,并给出了几个相应的结果。

关键词:离散 Hopfield 神经网络;稳定性;图论;网络状态图

中图分类号:TP183 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2002)01-0078-03

1 基本概念

具有 n 个神经元的 DHNN,其拓扑结构可以由一个 $n \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{W} = (w_{ij})_{n \times n}$ 和一个 n 维列向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$ 所唯一确定,并记为 $N = (\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})$ 。若用 $x_i(t)$ 表示神经元 i 在时刻 t 所处的状态,并且只有两种状态:兴奋用 $x_i(t) = 1$ 表示和抑制用 $x_i(t) = -1$ 表示, $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 。DHNN 的并行演化方程(或并行运行方程)为:

$$x_i(t+1) = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(t) + \theta_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

若令 $\mathbf{X}(t) = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, $\mathbf{W} = (w_{ij})_{n \times n}$, 则式(1)可以写成:

$$\mathbf{X}(t+1) = \text{sgn}(\mathbf{W}\mathbf{X}(t) + \boldsymbol{\theta})$$

设 DHNN $N = (\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})$ 从初态 $\mathbf{X}(t_0)$ 开始,经过一个有限的时刻之后,网络的输出不再发生变化,即: $\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}(t)$, 则称此网络关于初始状态 $\mathbf{X}(t_0)$ 收敛(或稳定)。如果网络关于任何的初态都是稳定的,则称网络是稳定的。若 \mathbf{X} 是 DHNN $N = (\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})$ 的一个稳定状态,则有

$$\mathbf{X} = \text{sgn}(\mathbf{W}\mathbf{X} + \boldsymbol{\theta}) \quad (2)$$

有时也把满足式(2)的 \mathbf{X} 称为网络 N 的稳定吸引子或简称为吸引子。

设 $N = (\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})$ 是一 n 阶 DHNN, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r$ 是 $r (\geq 2)$ 个性值 $(-1$ 和 $1)$ n 维列向量,若

$$\mathbf{X}_{j+1} = \text{sgn}(\mathbf{W}\mathbf{X}_j + \boldsymbol{\theta}), \mathbf{X}_1 = \text{sgn}(\mathbf{W}\mathbf{X}_r + \boldsymbol{\theta}) \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \quad (3)$$

且 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r$ 两两互不相同,则称 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r$ 为网络 N 的一个周期为 r 的极限环吸引子,记为 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_r)$, 简称环吸引子或极限环。

对于 n 阶的 DHNN,所有可能的状态集,记为 B^n ,它就是所谓的 Boole 空间:

$$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T : x_i = 1, -1, 1 \leq i \leq n\}$$

对于 n 阶 DHNN $N = (\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})$,其网络状态图记为 G ,它是一个 2^n 阶的定向图。 G 的顶点集为 B^n ,定向弧集为:

$$E(G) = \{(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) : \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in B^n, \text{且 } \mathbf{X}_j = \text{sgn}(\mathbf{W}\mathbf{X}_i + \boldsymbol{\theta})\}$$

于是 G 的汇点对应于 N 的稳定点, G 的有向圈对应于 N 的极限环。关于网络状态图 G ,从文献[6,7]的结论和证明可得出下面重要引理。

引理^[7,8] 设 $N = (\mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})$ 是一个 n 阶 DHNN, N 共有 p 个吸引子, q 个环吸引子,则网络状态图 G 的连通分支数 $\omega(G)$ 为 $\omega(G) = p + q$, 并且每个连通分支中的顶点都有指向汇点或有向圈的有向路,即每个连通分支

中的顶点都可以吸引到汇点或有向圈。

2 主要结果及其证明

DHNN 的稳定性完全取决于 W 和 θ 及其符号函数。若 $W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_m), \theta = (\theta_1^T, \dots, \theta_m^T)^T$, 其中 W_i 是一个 n_i 阶的方阵 ($1 \leq i \leq m$), W 中其余的块均为零元素组成的块, θ_i 是一个 n_i 阶的列向量 ($1 \leq i \leq m$)。下面主要讨论利用 DHNN $N_i = (W_i, \theta_i) (1 \leq i \leq m)$ 的有关性质来研究 DHNN $N = (W, \theta)$ 的性质。

为叙述方便, 以下我们称稳定吸引子是周期为 1 的极限环, 则有下列定理。

定理 DHNN $N_i = (W_i, \theta_i)$ 有周期为 l_i 的极限环 ($1 \leq i \leq m$), 则 DHNN $N_i = (W_i, \theta_i)$ 一定有周期为 l 的极限环, 其中 l 是 l_1, \dots, l_m 的最小公倍数。

证明 当 $m = 1$ 时, 结论显然成立。

当 $m = 2$ 时, 由于 DHNN N_1 和 DHNN N_2 分别有周期为 l_1 和 l_2 的极限环, 所以 DHNN N_1 存在状态 X_1, \dots, X_{l_1} 和 DHNN N_2 存在状态 Y_1, \dots, Y_{l_2} 使

$$\left. \begin{aligned} X_{j+1} &= \text{sgn}(W_1 X_j + \theta_1), j = 1, 2, \dots, l_1 - 1 \\ X_1 &= \text{sgn}(W_1 X_{l_1} + \theta_1) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{j+1} &= \text{sgn}(W_2 Y_j + \theta_2), j = 1, 2, \dots, l_2 - 1 \\ Y_1 &= \text{sgn}(W_2 Y_{l_2} + \theta_2) \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

成立, 并且 X_1, \dots, X_{l_1} 两两互不相同, Y_1, \dots, Y_{l_2} 两两互不相同。即网络状态图 G_1 和 G_2 分别存在周期为 l_1 和 l_2 的有向圈 (这里不妨设 $l_1 < l_2$):

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_{l_1} \rightarrow X_1, \quad Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{l_2} \rightarrow Y_1 \tag{6}$$

所以有

$$\begin{aligned} Z_1 (X_1^T, Y_1^T)^T &\rightarrow Z_2 = (X_2^T, Y_2^T)^T \rightarrow \dots \rightarrow Z_{l_1} = (X_{l_1}^T, Y_{l_1}^T)^T \rightarrow \dots \rightarrow \\ Z_{l_2} &= (X_{l_2}^T, Y_{l_2}^T)^T \rightarrow \dots \rightarrow Z_l = (X_l^T, Y_l^T)^T \rightarrow Z_1 \end{aligned} \tag{7}$$

其中 l 是 l_1, l_2 的最小公倍数, 很明显式(7)中的“ \rightarrow ”的个数正好是 l , 并且 Z_1, Z_2, \dots, Z_l 两两互不相同。反证法, 若式(7)中有 $1 \leq m_1 < m_2 \leq l$, 使 $Z_{m_1} = Z_{m_2}$, 即 $X_{m_1} = X_{m_2}, Y_{m_1} = Y_{m_2}$, 所以 $m_2 - m_1 \equiv 0 \pmod{l_1}, m_2 - m_1 \equiv 0 \pmod{l_2}$, 因此 $m_2 - m_1 \equiv 0 \pmod{l}$, 与 m_1, m_2 的假设矛盾, 所以 $Z_1 Z_2 \dots Z_l Z_1$ 是网络状态图 G 的一个圈, 即是 DHNN $N = (W, \theta)$ 的一个周期为 l 的极限环。

对于 $m \geq 2$ 的情形, 完全可类似地来证明结论成立。

推论 若 DHNN $N_i = (W_i, \theta_i) (1 \leq i \leq m)$ 有稳定的吸引子, 则 DHNN $N = (W, \theta)$ 也有稳定的吸引子。特别地, 若 DHNN $N_i = (W_i, \theta_i) (1 \leq i \leq m)$ 是稳定的, 则 DHNN $N = (W, \theta)$ 也是稳定的。

3 两个例子

任给 $I_1, I_2, \dots, I_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\} = I$ 满足 $I_1 \cup \dots \cup I_m = I$, 且 $I_i \cap I_j = \emptyset (i \neq j)$ 。如果每次等概率地取 I_1, I_2, \dots, I_m 中的某个 I_i 中的所有神经元按式(1)并行演化, 则称 DHNN(1)按部分并行演化(PSU)模式进行演化。设 W 是由分块矩阵 $W_{ij} (0 \leq i, j \leq m)$ 组成的, 文献[4]中指出若 W_{ii} 是半正定的 (不一定对称), 且 $W_{ji}^T = W_{ij} (i \neq j)$, 则 DHNN(1)按 PSU 是稳定的。文献[5]曾说明该结论是错误的, 但是这里可以通过定理给出条件更强 $W_{ij} = 0 (i \neq j)$ 的非常简单的反例。

例 1 取 $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}, \theta = 0$, 其中 $W_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 半正定, $W_{21} = W_{12}^T = (0, 0), W_{22} = (1)$ 。很显然

该网络满足上面的条件。但由于网络 $N = (W_{11}, 0)$ 有周期为 4 的极限环 (并行模式), 而网络 $N = (W_{22}, 0)$ 的两个状态均为稳定状态, 由推论 1 知网络 $N = (W, 0)$ 有 2 个周期为 4 的极限环 (并行模式)。显然网络 $N = (W, 0)$ 的并行模式与 PSU 模式 ($I_1 = \{1, 2\}, I_2 = \{3\}$) 收敛性相同, 所以, 网络 $N = (W, 0)$ 有 2 个周期为 4 的极限环 (PSU 模式)。经验证确知该网络有周期为 4 的极限环。

反对称 DHNN 同对称 DHNN 一样也是一种比较实用的网络, 文献[2, 7]分别用不同的方法证明了: 若

$\forall X \in B^n, WX$ 无零分量,且 $\theta=0$,则网络(1)对任一初始状态 $X_0 \in B^n, X_0$ 为收敛于周期为 4 的极限环。由于上述条件太强,文献[7]提出下面猜想。

猜想^[7] 设 $n(\geq 3)$ 阶反对称 DHNN, $\theta=0, X_0 \in B^n, X_0$ 为收敛于周期为 4 的极限环的充要条件是至少存在一个 $i_0(1 \leq i_0 \leq n)$,使 $w_{i_0 1} + w_{i_0 2} + \dots + w_{i_0 n} \neq 0$ 成立。

显然必要条件是成立的,下面将说明其充分条件是不成立的。

例 2 取 $W = \text{diag}(W_1, W_2), \theta=0$,其中 $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

虽然可验证满足猜想的条件,但其结论不成立。这是因为 DHNN $N_1 = (W_1, 0)$ 有一个周期为 3 的极限环和一个稳定点,而 DHNN $N_2 = (W_2, 0)$ 有一个周期为 4 的极限环,所以由定理知 DHNN $N = (W, 0)$ 不是稳定的。事实上该网络的状态图

如图 1 所示,网络节点中的数字表示该状态的十进制编码,如状态 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ 的编码为:

$$\text{code}(X) = \sum_{k=1}^5 j_k 2^{5-k}, \text{其中 } j_k = \begin{cases} 1, & i_k = 1 \\ 0, & i_k = -1 \end{cases}$$

由网络状态图可以看出网络有一个周期为 12 的极限环和周期为 4 的极限环,说明猜想不成立。

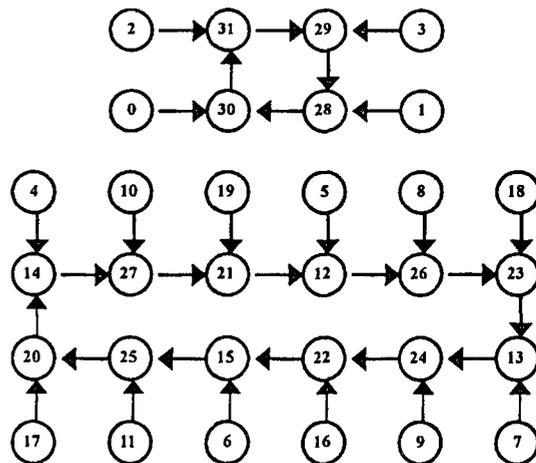


图 1 例 2 的网络状态图

参考文献:

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems emergent collective computational abilities[J], Proceedings of National Academy of Science USA, 1982, 79(4): 2554 - 2558.
[2] Goles E. Antisymmetrical neural networks[J]. Discrete Applied Mathematics, 1986, 13(1): 97 - 100.
[3] Bruck J. On the convergence properties of the Hopfield model[J]. Proceedings of the IEEE, 1990, 78(10): 1579 - 1585.
[4] Cernuschi - Frias B. Partial simultaneous updating in Hopfield memories[J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., 1989, 19(4): 887 - 888.
[5] Lee D L. New stability conditions for Hopfield neural networks in partial simultaneous update mode[J]. IEEE Trans. Neural Networks, 1999, 10(4): 975 - 978.
[6] 廖晓昕, 昌莉, 沈轶. 离散 Hopfield 神经网络的稳定性研究[J]. 自动化学报, 1999, 25(6): 721 - 727.
[7] 许进, 保铮. 反对称离散 Hopfield 网络的稳定性理论[J]. 电子学报, 1999, 27(1): 103 - 107
[8] 许进, 保铮. 离散神经网络的数学理论(1) - 网络状态图[J]. 西安电子科技大学学报, 1999, 26(3): 265 - 268.

(编辑: 门向生)

The Stability Study of Discrete Hopfield Networks Based on Graph Theory

MA Run - nian, YANG You - she

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: With the aid of graph theory, the stability of discrete Hopfield neural networks with diagonal block matrix of the connection weight matrix is mainly studied in this paper. By constructing state graph of the networks, it is proved that the stability is fully determined by the stability of discrete Hopfield networks with the diagonal block as the connection weight matrix. In addition, several results are given.

Key words: discrete Hopfield neural networks; stability; graph theory; state graph of the network