

三角域上 C^1 连续的插值样条函数

李选平¹, 王素明²

(1. 空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077; 2. 陕西工运学院教研部, 陕西 西安 710003)

摘要:通过引进三角域上的插值基函数,给出了一种新的三角域上的二元三次插值样条函数,这种插值样条函数整体达到 C^1 连续,且在各网格点处的参数可由递推公式得到。文中给出的插值样条函数较之 Farin 提出的分裂三角形方法,具有计算方便、待定系数少且参数易于确定等优点,更易于在 CAD 中应用。

关键词:样条函数;三角域;插值; C^1 连续

中图分类号: O241 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2001)04-86-88

矩形域上曲面造型法已广泛应用在 CAD 和 CAGD 领域,随着科学技术的不断发展,矩形域上的曲面造型已不能满足实际工程的需要。近年来,三角域上曲面构造已引起人们的极大兴趣,其中最著名的是 Farin 的方法,但待定参数达 21 个之多,计算很复杂,给应用带来不便。为此,文献[1]通过引进了 5 个基函数,构造了一种二元三次插值样条函数,但为了确定插值函数中的待定系数,需要求解连续性方程组。本文通过引进 10 个基函数,构造了一种新的插值样条函数,其待定参数不需求解方程,只需利用递推关系就可求出,大大减少了运算量,给应用带来很大的方便。

首先引进如下函数:

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= 1 - 3u^2 + 2u^3, & \varphi_2(u, v) &= -3u^2 + 3v^2 + 2u^3 - 2v^3 \\ \varphi_3(u) &= u^2(3 - 2u), & \varphi_4(u, v) &= u(1 - 2u + 2uv - v^2), \\ \varphi_5(u) &= u(1 - u)^2, & \varphi_6(u, v) &= u(u - v)^2, \\ \varphi_7(u, v) &= (u^2 - v^2)(1 - v), & \varphi_8(u) &= u^2(u - 1), \\ \varphi_9(u, v) &= u^2(v - 1), & \varphi_{10}(u) &= u(1 - v)(v - u). \end{aligned}$$

称以上函数为三角域上的插值基函数。

如果 $f(x, y)$ 定义在区域 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上,还可以对此矩形域作进一步剖分,首先作矩形剖分 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$,其次将矩形域再按图 1 分成两个小三角形区域。记 $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, k_{j+1} = y_{j+1} - y_j$,

$$\text{令 } f_{ij} = f(x_i, y_j), S_{k,r}(i, j) = \left. \frac{\partial^{k+r} s(x, y)}{\partial x^k \partial y^r} \right|_{(x, y) = (x_i, y_j)}.$$

$u_i = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, v_j = \frac{y - y_j}{k_{j+1}}$,则在图 1 所示区域上的插值样

$$\text{条函数为: } S(x, y) = \begin{cases} S_{I_{ij}}(x, y) & (x, y) \in I_{ij} \\ S_{II_{ij}}(x, y) & (x, y) \in II_{ij} \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

其中

$$S_{I_{ij}}(x, y) = f_{ij}\varphi_1(v_j) + f_{i,j+1}\varphi_2(u_i, v_j) + f_{i,j+1}\varphi_3(u_i) + [S_{10}(i, j)\varphi_4(u_i, v_j) +$$

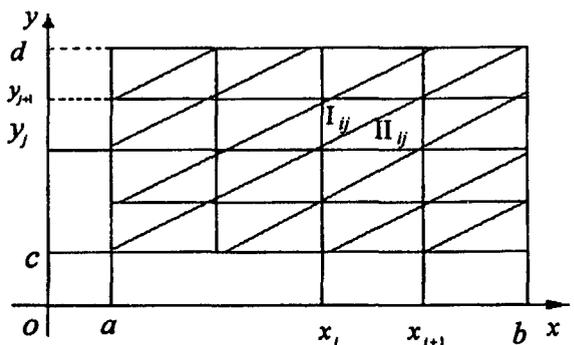


图 1 矩形域分割图

$$\begin{aligned}
 & S_{1,0}(i, j+1)\varphi_6(u_i, v_j) + S_{1,0}(i+1, j+1)\varphi_8(u_i)]h_{i+1} + [S_{0,1}(i, j)\varphi_5(v_j) + \\
 & S_{0,1}(i, j+1)\varphi_7(u_i, v_j) + S_{0,1}(i+1, j+1)\varphi_9(u_i, v_j)]k_{j+1} + S_{1,1}(i, j)\varphi_{10}(u_i, v_j)h_{i+1}k_{j+1} \\
 S_{\parallel ij}(x, y) = & f_{ij}\varphi_1(u_i) + f_{i+1, j}\varphi_2(v_j, u_i) + f_{i+1, j+1}\varphi_3(v_j) + [S_{1,0}(i, j)\varphi_5(u_i) + \\
 & S_{1,0}(i+1, j)\varphi_7(v_j, u_i) + S_{1,0}(i+1, j+1)\varphi_9(v_j, u_i)]h_{i+1} + [S_{0,1}(i, j)\varphi_4(v_j, u_i) + 1 \\
 & S_{0,1}(i+1, j)\varphi_6(v_j, u_i) + S_{0,1}(i+1, j+1)\varphi_8(v_j)]k_{j+1} + S_{1,1}(i, j)\varphi_{10}(v_j, u_i)h_{i+1}k_{j+1}
 \end{aligned}$$

容易验证 $S(x, y)$ 在所有边界线即 $x = x_i, y = y_j$ 及 $u_i = v_j$ 上连续, 从而 $S(x, y)$ 连续。如果还要求 $S(x, y)$ 整体 C^1 连续, 则只须:

$$\frac{\partial S_{1,ij}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \frac{\partial S_{\parallel i-1,j}(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \tag{1}$$

$$\frac{\partial S_{\parallel ij}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_j} = \frac{\partial S_{1,i,j-1}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_j} \tag{2}$$

$$\frac{\partial S_{1,ij}(x, y)}{\partial x} \Big|_{u_i=v_j} = \frac{\partial S_{\parallel ij}(x, y)}{\partial x} \Big|_{u_i=v_j} \tag{3}$$

$$\frac{\partial S_{1,ij}(x, y)}{\partial y} \Big|_{u_i=v_j} = \frac{\partial S_{\parallel ij}(x, y)}{\partial y} \Big|_{u_i=v_j} \tag{4}$$

由式(1)可得到:

$$2 \frac{S_{0,1}(i, j) - S_{0,1}(i-1, j)}{h_i} - S_{1,1}(i, j) - S_{1,1}(i-1, j) = 0 \tag{5}$$

由式(2)可得到:

$$2 \frac{S_{1,0}(i, j) - S_{1,0}(i, j-1)}{k_j} - S_{1,1}(i, j-1) - S_{1,1}(i, j) = 0 \tag{6}$$

由式(3)可得到:

$$S_{1,1}(i, j) = 3 \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i, j+1} + f_{i, j} - f_{i+1, j}}{h_{i+1}k_{j+1}} + \frac{S_{1,0}(i+1, j) - S_{1,0}(i+1, j+1)}{k_{j+1}} + \frac{S_{0,1}(i, j+1) - S_{0,1}(i+1, j+1)}{h_{i+1}} \tag{7}$$

由式(4)可得到和式(7)相同的结果, 把式(7)中的 i 换成 $i-1, j$ 换成 $i-1$ 可得到:

$$S_{1,1}(i-1, j-1) = 3 \frac{f_{ij} - f_{i-1, j} + f_{i-1, j-1} - f_{i, j-1}}{h_i k_j} + \frac{S_{1,0}(i, j-1) - S_{1,0}(i, j)}{k_j} + \frac{S_{0,1}(i-1, j) - S_{0,1}(i, j)}{h_i} \tag{8}$$

由式(5)解出 $S_{0,1}(i, j)$, 把式(5), 式(6)两式代入式(8)可得到:

$$S_{1,1}(i-1, j-1) = 3 \frac{f_{ij} - f_{i-1, j} + f_{i-1, j-1} - f_{i, j-1}}{h_i k_j} - \frac{1}{2} [S_{1,1}(i, j-1) + S_{1,1}(i, j)] - \frac{1}{2} [S_{1,1}(i, j) + S_{1,1}(i-1, j)] \tag{9}$$

由式(9)解出 $S_{1,1}(i, j)$, 得:

$$S_{1,1}(i, j) = 3 \frac{f_{ij} - f_{i-1, j} + f_{i-1, j-1} - f_{i, j-1}}{h_i k_j} - S_{1,1}(i-1, j-1) - \frac{1}{2} S_{1,1}(i, j-1) - \frac{1}{2} S_{1,1}(i-1, j)$$

由式(6)解出 $S_{1,0}(i, j)$, 便得到如下定理。

定理 $S(x, y)$ 整体 C^1 连续的充要条件是:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & S_{1,1}(i, j) = 3 \frac{f_{ij} - f_{i-1, j} + f_{i-1, j-1} - f_{i, j-1}}{h_i k_j} - S_{1,1}(i-1, j-1) - \frac{1}{2} S_{1,1}(i, j-1) - \frac{1}{2} S_{1,1}(i-1, j) \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & S_{0,1}(i, j) = S_{0,1}(i-1, j) + \frac{1}{2} h_i [S_{1,1}(i, j) + S_{1,1}(i-1, j)] \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \\
 & S_{1,0}(i, j) = S_{1,0}(i, j-1) + \frac{1}{2} k_j [S_{1,1}(i, j) + S_{1,1}(i, j-1)] \\
 & \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \right.$$

利用上述递推关系式时, 还须知道初始条件, 即 $S(x, y)$ 在矩形最左方及最下方边界线各网格点上的偏导数值, $S_{1,1}(i, 0), S_{1,0}(i, 0) (i = 0, 1, \dots, m-1)$ 及 $S_{0,1}(0, j)$ 和 $S_{1,1}(0, j) (j = 0, 1, \dots, n-1)$ 。

定理的递推关系在使用时可采用两种方案,一种是由左到右依次算出各纵网格上的 $S_{1,1}(i,j)$, $S_{0,1}(i,j)$, $S_{1,0}(i,j)$ 。另一种方案是由下向上依次算出各横网格上的 $S_{1,1}(i,j)$, $S_{0,1}(i,j)$ 和 $S_{1,0}(i,j)$ 。由此可见,这种方法非常简便,克服了已有的许多文献中通过解方程来确定各网格点上的参数的缺点。

参考文献:

- [1] 蒋大为. 三角域上二元三次插值样条函数[J]. 西北工业大学学报, 1993, 11(1): 56 - 62.
- [2] Farin G. Piecewise triangular C^1 Surface strips[J]. CAD, 1985, 3(1): 45 - 47.
- [3] Farin G. Triangular Bernstein Bezier patches[J]. CAGD, 1986, 3(2): 83 - 127.
- [4] Bamhill RESurfaces in Computer Aided Geometric Design[J]. CAGD, 1985, 2(1): 1 - 7.

Interpolation Spline Function over Triangles

Ll Xuan - ping¹, WANG Su - ming²

- (1. The Telecommunication Engineering Institute of the Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;
- 2. Shaanxi GongYun Institute, Xi'an 710003, China)

Abstract: A new bivariate cubic interpolation spline function over triangles is given by the introduction of new interpolation basic functions on triangles, and it possesses continuity and the parameters on the net points can be determined by a transmission formula. In the authors' opinion, the method in this paper have the advantages of small calculation, fewer parameters and the parameters can be obtained very easily by using a transmission formula in stead of the Farins' split - triangle interpolante method, thus the new method is easy to use in CAD.

Key words: spline function ; triangle; interpolation ; continuity