一类平面微分系统的极限环的不存在性

李建全[1]， 王国正[2]
(1. 西安交通大学，陕西 西安 710049;2. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘 要:通过研究微分系统 $\dot{x} = -y + \delta x + axy + my^2 + ly^{2n+1}$,$\dot{y} = G(x)$ 的奇点,借助比较定理,将该方程与其对称的方程进行比较,并通过分析散度和变量代换,得到了该系统极限环不存在的充分条件。

关键词:微分系统;奇点;极限环;不存在性
中图分类号:O175.12 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2001)02-0078-04

本文研究的微分系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x + axy + my^2 + ly^{2n+1} \\ \dot{y} = G(x) \end{cases} (n \in N) \tag{1}$$

式中 $G(x)$ 满足以下条件:

(C_1) $G(x)$ 解析;

(C_2) $G(0) = 0, G'(0) > 0, G'(x) \geqslant 0$。

1 $am = 0$ 情形

定理1 当 $am = 0$ 时,系统(1)不存在极限环。

证明 (1)当 $a = 0$ 时,系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x + my^2 + ly^{2n+1} \equiv P_1(x,y) \\ \dot{y} = G(x) \equiv Q_1(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

因为 $\mathrm{div}(P_1, Q_1) = \delta$,故系统(2)不存在极限环。

(2)当 $m = 0$ 时,系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x + axy + ly^{2n+1} \\ \dot{y} = G(x) \end{cases} \tag{3}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{-y + \delta x + axy + ly^{2n+1}}{G(x)} \tag{3'}$$

系统(3′)关于 x 轴的对称方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{-y - \delta x + axy + ly^{2n+1}}{G(x)} \tag{4}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\bigg|_{(3')} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\bigg|_{(4)} = \frac{2\delta x}{G(x)}$$

收稿日期:2000-01-07
作者简介:李建全(1965-),男,山西万荣人,副教授,博士生,主要从事微分方程定性理论及其应用研究.

所以依条件(C_2)和比较定理,系统(3)不存在极限环。

因此,定理 1 成立。

2　$am \neq 0$ 情形

下面仅考虑 $am\neq 0$ 的情形。因 $a\neq 0$,可以对系统(1)作变换:$x=\frac{\bar{x}}{a}, y=\frac{\bar{y}}{a}$,并将变换后的 $\bar{x},\bar{y}$ 仍分别记为 x,y,则系统(1)变为

$$\begin{cases}\dot{x} = -y+\delta x+xy+\alpha y^2+\beta y^{2n+1} \equiv P(x,y)\\ \dot{y} = g(x) \equiv Q(x,y)\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\alpha=\frac{m}{a}\neq 0, \beta=\frac{1}{a^{2n}}, g(x)=aG\left(\frac{x}{a}\right)$。显然,$g(x)$ 满足条件(C_1)与(C_2)。不妨设 $a>0$,否则,可通过变换:$x=\bar{x}, y=-\bar{y}, t=-\tau$ 来变为 $a>0$ 的情形。

记 $\varphi(y)=\beta y^{2n}+\alpha y-1, \Delta=\left(\frac{1-2n}{2n}\right)^{2n-1}\frac{\alpha^{2n}}{2n}, \Delta_1=\left[\frac{\alpha}{n(2n+1)\beta}\right]^{\frac{1}{2n-1}}$。

系统(5)当 $\beta>0$ 时有三个奇点,分别为 $O(0,0), A(0,y_1), B(0,y_2)$(其中 $y_1,y_2(y_1<0<y_2)$)为 $\varphi(y)=0$ 的二根;当 $\beta=0$ 时有两个奇点,分别为 $O(0,0), C(0,\frac{1}{\alpha})$;当 $\Delta<\beta<0$ 时有三个奇点,分别为 $O(0,0), D(0,y_3), E(0,y_4)$(其中 $y_3,y_4(0<y_3<y_4)$ 为 $\varphi(y)=0$ 的二根);当 $\beta=\Delta$ 时有两个奇点,分别为 $O(0,0), F(0,\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{\alpha})$;当 $\beta<\Delta$ 时有唯一奇点 $O(0,0)$。

引理 1　当 $\delta>0$ 时,O,E,F 为系统(5)的不稳定奇点,A,B,C,D 为其鞍点。

由形式级数法可得到

引理 2　当 $\delta=0$ 时,原点 $O(0,0)$ 为系统(5)的不稳定细焦点。

定理 2　当 $\delta\geqslant 0$ 时,系统(5)不存在闭轨线。

证　因为

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ P_\delta & Q_\delta \end{vmatrix} = -xg(x) \leqslant 0$$

所以系统(5)关于 δ 构成广义旋转向量场。故只需证明当 $\delta=0$ 时系统(5)不存在闭轨线即可。事实上,若系统(5)在某一个 $\delta^*>0$ 时存在闭轨线 Γ^*,则当 $\delta=0$ 时系统(5)的正向轨线均将由 Γ^* 的外部穿向其内部,又当 $\delta=0$ 时的所有奇点均不稳定,从而由环域定理可知,在 Γ^* 的内部应存在 $\delta=0$ 时系统(5)的极限环,故出现矛盾。

设当 $\delta=0$ 时,系统(5)存在闭轨线 Γ,它所围成的区域为 D。此时系统(5)为

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y+xy+\alpha y^2+\beta y^{2n+1}}{g(x)} \tag{6}$$

系统(6)关于 x 轴的对称方程为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y+xy-\alpha y^2+\beta y^{2n+1}}{g(x)} \tag{6'}$$

因为

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(6)} - \left.\frac{dx}{dy}\right|_{(6')} = \frac{2\alpha y^2}{g(x)}$$

所以由文献[3]中的比较定理知,Γ 位于 x 轴下方部分关于 x 轴的对称线全部位于 Γ 的内部,故

$$\iint_D (P_x+Q_y)d\sigma = \iint_D y d\sigma > 0,$$

则原点 O 外围不可能存在闭轨线。又由于此时 $\operatorname{div}(P,Q)=y$,也不可能存在环绕其它奇点的闭轨线。因此,当 $\delta=0$ 时系统(5)不存在闭轨线。

由于对系统(5)有 $\operatorname{div}(p,Q)=y+\delta$，则有

引理 3 若系统(5)存在闭轨线，则其必与直线 $y=-\delta$ 相交。

定理 3 当 $\Delta<\beta<0,\delta\leqslant -y_4$ 时，系统(5)不存在闭轨线。

证 对系统(5)作变换：$x=\bar{x},y=\bar{y}-\delta$，并将变换后的 $\bar{x},\bar{y}$ 仍记为 x,y，则系统(5)变为

$$\begin{cases}\dot{x}=-(y-\delta)+xy+\alpha(y-\delta)^2+\beta(y-\delta)^{2n+1}\equiv P(x,y)\\ \dot{y}=g(x)\equiv\bar{Q}(x,y)\end{cases}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-(y-\delta)+xy+\alpha(y-\delta)^2+\beta(y-\delta)^{2n+1}}{g(x)}\tag{7}$$

系统(7)关于 x 轴的对称方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-(y+\delta)+xy-\alpha(y+\delta)^2+\beta(y+\delta)^{2n+1}}{g(x)}\tag{7'}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{(7)}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{(7')}=2\,\frac{-\delta\varphi(-\delta)+[\alpha-n(2n+1)\beta\delta^{2n-1}]y^2-\beta\sum\limits_{k=0}^{n-2}C_{2n+1}^{2k+1}y^{2n-2k}\delta^{2k+1}}{g(x)}$$

当 $\Delta<\beta<0,\delta\leqslant -y_4$ 时，$\varphi(-\delta)\leqslant 0$，所以 $-\delta\varphi(-\delta)\leqslant 0$。

又 $\alpha-n(2n+1)\beta y^{2n-1}<a+n(2n+1)\beta y_4^{2n-1}<\alpha+2n\beta y_4^{2n-1}<0$(因为 $\varphi'(y_4)=\alpha+2n\beta y_4^{2n-1}<0$)，则若系统(7)存在闭轨线 Γ，依引理 3 知其与 x 轴相交，由比较定理知，Γ 位于 x 轴上方部分关于 x 轴的对称线全部位于 Γ 的内部，从而有

$$\iint\limits_{\Gamma内}(\bar{P}_x+\bar{Q}_y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Gamma内}y\mathrm{d}\sigma<0$$

故出现矛盾。

定理 4 当 $\beta\leqslant\Delta,\delta\leqslant\Delta_1$，时，系统(5)不存在闭轨线。

证 当 $\beta\leqslant\Delta,\delta\leqslant\Delta_1$ 时，有 $\varphi(-\delta)<0,-\delta\varphi(-\delta)<0,\alpha-n(2n+1)\beta\delta^{2n-1}\leqslant 0$，则与定理 3 同理可证。

定理 5 当 $\Delta<\beta<0,y_3\geqslant-\Delta_1,-y_3\leqslant\delta\leqslant-\Delta_1$ 时，系统(5)不存在闭轨线。

证 当 $\Delta<\beta<0,y_3\geqslant-\Delta_1,-y_3\leqslant\delta\leqslant-\Delta_1$ 时，$\varphi(-\delta)\leqslant 0$ 且 $\alpha-n(2n+1)\beta\delta^{2n-1}\leqslant 0$，而 $\varphi(-\delta)$ 与 $\alpha-n(2n+1)\beta\delta^{2n-1}$ 不同时为零，则与定理 3 同理可证。

引理 4 若系统(5)当 $\beta>0,-y_2<\delta\leqslant-\frac{y_2}{2}$ 或 $\beta=0$ 时存在仅含有奇点 O 的闭轨线 Γ，则 Γ 的最高点 P 关于直线 $y=-\delta$ 的对称点 P' 必位于 Γ 的最低点 Q 的下方。

证 当 $\beta>0,-y_2<\delta\leqslant-\frac{y_2}{2}$ 或 $\beta=0$ 时，系统(5)在原点 O 外围的等倾线如图 1 所示。如果存在仅含有 O 点的闭轨线 Γ。假设 P' 不在 Q 的下方，那么，或者 Γ 关于直线 $y=-\delta$ 的对称线 Γ' 与 Γ 除 M,N(或还有 Q)外不再相交，这时有

$$\iint\limits_{\Gamma内}(P_x+Q_y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{\Gamma内}(y+\delta)\mathrm{d}\sigma<0$$

可知 Γ 不存在；或至少在 y 轴的一方(比如左方)除 M 外再相交两点或两点以上，这就与式 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{(7)}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{(7')}$ 矛盾，因此 P' 位于 Q 的下方。

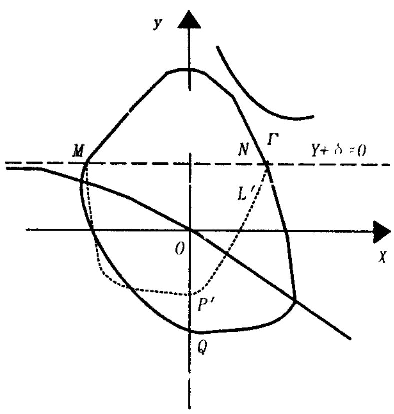

图 1 等倾线与闭轨线

定理 6 当 $\beta=0,\delta\leqslant-\frac{1}{2\alpha}$ 时，系统(5)不存在闭轨线。

证 当 $\beta=0$ 时，系统(5)有两个奇点，分别为 $O(0,0)$，$C(0,\frac{1}{\alpha})$，而 C 为鞍点，故系统(5)仅有可能存在含 O 点的闭轨线 Γ。而当 $\delta\leqslant-\frac{1}{2\alpha}$ 时，直线 $y=-\delta$ 与 O 点的距离将不小于 $\frac{1}{2\alpha}$，由引理 4 知，若存在 Γ，它的最高点必定位于 C 的上方，这是不可能的。

定理 7　当 $\beta>0,\delta\leqslant -\frac{y_2}{2}$ 时,系统(5)不存在闭轨线。

证　由引理 1,当 $\beta>0$ 时,奇点 A,B 均为鞍点,则系统(5)仅可能存在只含 O 点的闭轨线。由引理 3,若系统(5)存在闭轨线,则直线 $y=-\delta$ 必位于点 O 与 B 之间,即 $-\delta<y_2$,也就是当 $\delta\leqslant -y_2$ 时,系统(5)不存在闭轨线。

又当 $-y_2<\delta\leqslant -\frac{y_2}{2}$ 时,直线 $y=-\delta$ 与 O 点的距离将不小于 $\frac{y_2}{2}$,由引理 4 知,若系统(5)存在闭轨线,它的最高点必位于 B 点的上方,这也是不可能的。

参考文献:

[1] 张锦炎.常微分方程几何理论与分支问题[M].北京:北京大学出版社,1981.

[2] 叶彦谦.极限环论[M].上海:上海科学技术出版社,1984.

[3] 尤秉礼.常微分方程补充教程[M].北京:高等教育出版社,1986.

[4] 李建全.一类三次微分系统极限环的存在唯一性[J].工程数学学报,1997,14(3):115-118.

Nonexistence of Limit Cycles for Some Plane Differential Systems

LI Jian-quan,[1] WANG Guo-zheng[2]

(1. Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. The Telecommunication Engineering Institute of the Air Force Engineering University (AFEU.), Xi'an 710077, China)

Abstract: The odd point of plane differential systems $\dot{x}=-y+\delta x+axy+my^2+ly^{2n+1}$, $\dot{y}=G(x)$, is studied. The sufficient condition of the nonexistence of limit cycles for the system is obtained by means of comparing theorem, analyzing devergence and variable substitution.

Key words: differential system; odd point; limit cycle; nonexistence