

# 多柔体系统动力学模型的特征值降阶方法

管红根<sup>1</sup>, 冯金富<sup>2</sup>, 何永<sup>1</sup>, 高树滋<sup>1</sup>

(1. 南京理工大学机械学院, 江苏南京 210094; 2. 空军工程大学工程学院, 陕西西安 710038)

**摘要:**详细研究了多柔体系统动力学模型的特征值降阶问题, 针对挠性空间飞行器系统的姿态动力学方程, 推导出基于 Riccati 迭代算法的特征值模态截断准则和计算步骤。分析结果表明, 它较一般特征值截断准则更能精确地反映原系统特性, 并且能准确地保留原系统低阶模态频率和振型。其模态截断后动力响应曲线与原系统吻合较好。

**关键词:**多体系统; 柔性结构; 姿态动力学; 降阶

**中图分类号:** O313.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2001)02-0075-03

本文研究的挠性空间飞行器  $V$ , 如图 1 所示, 它是由刚体部分  $R$  和挠性附件  $\varepsilon$  组成。

由于在建模过程中, 所得模型其阶数相当高, 这给控制和计算带来了困难, 因此工程上都要使其降阶, 获得一个尽可能反映原系统动力学特性的低阶模型来近似和简化高阶模型。至今人们提出好几种特征值模态截断方法<sup>[1-3]</sup>, 但这些方法只是在某种程度上接近于原始模型(固有频率与振型), 导致原系统特性的破坏, 有时会产生较大的动力响应误差, 给控制带来了困难。本文将引进用于控制系统 Riccati 迭代法, 进行特征值模态截断, 该法能精确地保留原系统  $N$  个模态中前  $N_1$  个模态频率与振型。其动力响应较一般特征值模态截断准确, 同时 Riccati 迭代法也可用于求大型空间柔性结构的低阶特征值和特征向量。

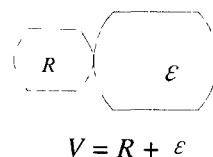


图 1 挠性空间飞行器模型

## 1 特征值模态截断法

图 1 所示模型姿态动力学方程可给出如下

$$\begin{cases} J_v \ddot{\theta} + H \ddot{\eta} = F_\theta \\ H^T \ddot{\theta} + \ddot{\eta} + 2\xi\Omega\eta + \Omega^2\eta = F_\eta \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $H$  为模态角动量系数,  $H = [H_1, H_2, \dots, H_N]$ ;  $J_v$  为整个飞行器的惯性张量;  $\theta$  为刚体部分的姿态角列阵;  $\eta$  为挠性附件约束模态坐标列阵,  $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]$ ;  $\xi$  为约束模态结构阻尼比例系数;  $\Omega$  为约束模态频率,  $\Omega = \text{diag}[\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N]$ ;  $F_\theta$  为作用于整个飞行器扭矩列阵;  $F_\eta$  为模态节点力。

由于在挠性空间飞行器中, 结构阻尼比例系数  $\xi$  一般在 0.000 1 ~ 0.01 之间, 不少资料取  $\xi = 0.005$ , 因此  $\xi$  是很小的数, 为了方便于特征值分析, 忽略方程(1)中的阻尼项, 我们研究的姿态动力学特征方程变成

$$\begin{cases} J_v \ddot{\theta} + H \ddot{\eta} = 0 \\ H^T \ddot{\theta} + \ddot{\eta} + \Omega^2\eta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这样, 原方程中有  $N$  个约束模态坐标, 传统的特征值模态截断法为保留前  $\bar{N}$  个模态, 则截断模态数为  $\bar{N} = N - \bar{N}$ , 因此截断后的动力学方程为

收稿日期: 2000-09-06

基金项目: 国防科技预研基金资助项目(P9701)

作者简介: 管红根(1964-), 男, 江苏南京人, 讲师, 硕士, 主要从事火炮结构设计和动力学研究。

$$\begin{cases} J_v \ddot{\theta} + \bar{H} \ddot{\eta} = 0 \\ \bar{H}^T \ddot{\theta} + \ddot{\eta} + \bar{\Omega}^2 \eta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\bar{H} = [H_1, H_2, \dots, H_N]$ ;  $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N]$ ;  $\bar{\Omega}^2 = \text{diag}[\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_N^2]$  (4)

对于方程(2),我们给出其动力学方程紧凑形式:

$$M \ddot{X} + KX = 0 \quad (5)$$

式中,  $M = \begin{bmatrix} J_v & H \\ H^T & I \end{bmatrix}$ ;  $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix}$ ;  $X = \begin{bmatrix} \theta \\ \eta \end{bmatrix}$  (6)

$M, K$  分别为系统的质量阵与刚度阵,  $X$  是系统的混合坐标列阵, 具有  $N$  个自由度。假使  $M$  阵是满秩的, 通过矩阵转换, 方程(5)可化成

$$\ddot{X} + AX = 0 \quad A = M^{-1}K \quad (7)$$

定义  $A$  的特征值为  $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ ,  $\lambda_i$  从小到大排列, 其相应的特征向量为  $T = [T_1, T_2, \dots, T_N]$ , 并有如下关系

$$AT = TJ \rightarrow A = TJT^{-1} \quad (8)$$

通过模态截断, 保留模态数为  $N_1$ , 截断模态数  $N_2 = N - N_1$ , 将模态矩阵  $T$  与特征值  $J$  分解成如下形式:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} T_{11} \in R^{N_1 \times N_1} & T_{12} \in R^{N_1 \times N_2} \\ T_{21} \in R^{N_2 \times N_1} & T_{22} \in R^{N_2 \times N_2} \end{matrix}$$

$$J = \text{diag}[J_1, J_2] \quad J_1 = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_1}]$$

$$J_2 = \text{diag}[\lambda_{N_1+1}, \lambda_{N_1+2}, \dots, \lambda_N]$$

定义  $\bar{A}_{11} = T_{11} J_1 T_{11}^{-1}$  (10)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ T_{21} T_{11}^{-1} \end{bmatrix} Y \quad (11)$$

因此模态截断后的动力学方程变成

$$\ddot{Y} + \bar{A}_{11} Y = 0 \quad (12)$$

根据文献[3], 对于方程(7)与(12)其前  $N_1$  阶特征值相等。

注意, 矩阵  $\bar{A}_{11}$  不是直接通过计算  $T_{11}$  与  $J_1$  获得, 而是通过基于  $L$  转换的 Riccati 迭代方程计算出, 但必须首先确定系统保留模态数  $N_1$ 。Riccati 迭代方程为

$$L_{i+1} = (A_{22} + L_i A_{12})^{-1} (L_i A_{11} + A_{21}) \quad (13)$$

迭代余数  $R_i = L_i A_{11} - A_{22} L_i - L_i A_{12} L_i + A_{21}$  (14)

补偿矩阵  $D_i = L_{i+1} - L_i = (A_{22} + L_i A_{12})^{-1} (L_i A_{11} + A_{21}) - L_i = (A_{22} + L_i A_{12})^{-1} R_i$  (15)

因此矩阵  $L$ 、特征值  $\varphi(\bar{A}_{11})$ 、系统响应  $X$  的求解程序框图见图 2。

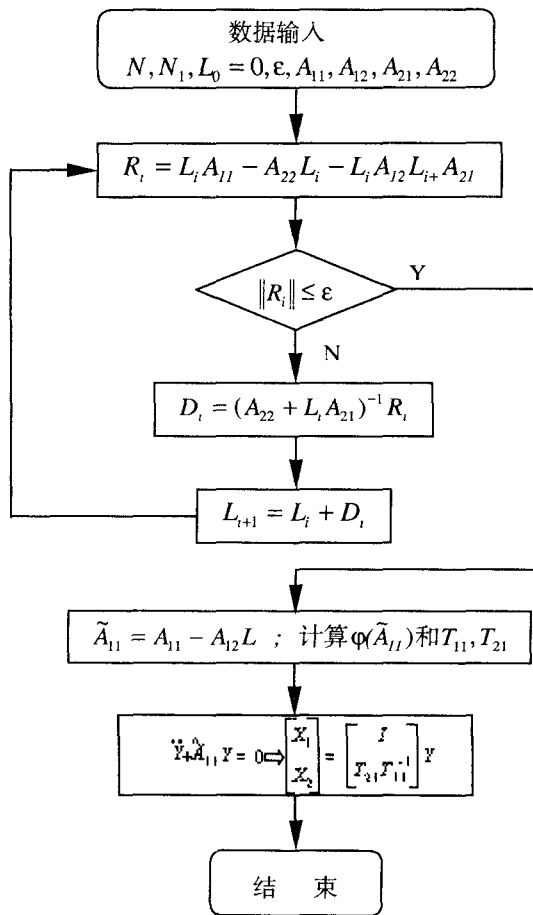


图 2 系统响应  $X$  的求解程序框图

## 2 计算和分析

建立具有图 3 的太阳帆板的卫星的姿态动力学方程, 由于平面弯曲刚度较大, 考虑它的外弯曲。利用有限元法, 可以求出它的前 8 阶约束模态频率见表 1, 由此可求得  $H$  为

$$H = \begin{bmatrix} 22.68 & 3.63 & 10^{-6} & -1.04 & 10^{-4} & 0.838 & 10^{-3} & 0.0727 \\ 10^{-6} & 10^{-6} & -3.43 & 10^{-5} & -0.949 & 10^{-4} & 0.426 & 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

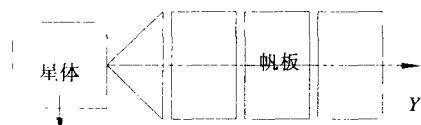


图 3 太阳帆板结构简图

图 4(a-c)给出了姿态角  $\theta_x$  自由响应曲线。虚线为原系统姿态角自由响应曲线,实线为用 Riccati 迭代法降阶后姿态角自由响应曲线,黑点线为用一般特征值截断降阶后姿态角自由响应曲线。

图 4(a)表明,当保留一阶约束模态时,通过一般特征值截断后,由于特征值误差较大,导致姿态角  $\theta_x$  不正确自由响应曲线,而用 Riccati 迭代法特征值截断后,其姿态角  $\theta_x$  自由响应曲线与准确响应曲线吻合较好。从图 4 可以看出,Riccati 迭代法较一般特征值截断更能精确地描述原系统自由响应曲线。随着保留模态数的增加,截断后的姿态角自由响应曲线的精度随之提高。

表 1 前 8 阶约束模态频率

序号	$f/\text{Hz}$	说明
1	0.285 4	对 Y 轴对称
2	1.724 8	对 Y 轴对称
3	2.050 4	对 Y 轴反称
4	4.661 7	对 Y 轴反称
5	6.475 7	对 Y 轴反称
6	8.891 8	对 Y 轴对称
7	11.745 9	对 Y 轴反称
8	15.461 3	对 Y 轴对称

### 3 结论

工程上普遍采用模态频率截断法,该法简单,精度一般符合要求,其根据是越是高频模态,振幅越小,适用于刚体部分大而挠性部分不大的柔性结构,截断后的模态频率和振型只是在某种程度上接近于原始模型。本文提出基于 Riccati 迭代法的特征值截断准则,

该法能精确保留原系统  $N$  个模态中前  $N_1$  个模态频率与振型。其动力响应较一般特征值模态截断准确,同时 Riccati 迭代法也可用于求大型空间柔性结构的低阶特征值和特征向量。

#### 参考文献:

[1] Hughes P C, Skelton R E. Modal Truncation for Flexible Spacecraft J. Guidance [J]. Control and Dymanics, 1981, 4(3):381 - 397.  
 [2] 金永德. 特征值模态价值模态截断准则[A]. 第三届空间运动控制技术学术会议论文集[C]. 北京:科学出版社,1986.  
 [3] 管红根. 多体系统的动力学模化和降阶方法的研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,1991.

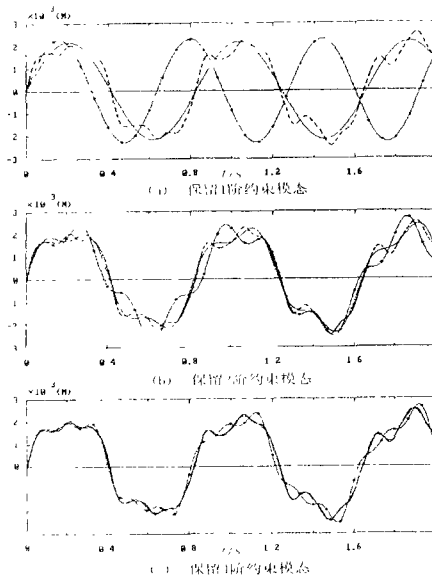


图 4  $\theta_x$  自由响应曲线

## Eigenvalue Reduced-order Method for Dynamic Model of Flexible Multibody System

GUAN Hong-gen<sup>1</sup>, FENG Jin-fu<sup>2</sup>, HE Yong<sup>1</sup>, GAO Shu-zi<sup>1</sup>

(1. The Mechanical School, NUST., Nanjing 210094, China;

2. The Engineering Institute of the Air Force Engineering University (AFEU.), Xi'an 710038, China)

**Abstract.** This paper expounds the problem on eigenvalue reduced-order for flexible umltibody system model, and derives the eigenvalue modal reduced-order oriterion and calculation steps based on Riccati iteration algorithm in accordance with attitude dynamics of flexible spacecraft system. Analysis results indicate that it can reflect better the basic characteristics of the original system than usually eigenvalue truncation criterion and exactly preserve the lower frequencies and mode shapes of the original system. Dynamic response curves of reduced-order model accord better with original system.

**Key words.** multibody system; flexible structure; attitude dynamics; reduced-order