第 2 卷第 1 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 2 No. 1
2001 年 2 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Feb. 2001

伴随卫星伴随运动运动学分析

王志刚[1]， 李　卿[1]， 陈士橹[2]， 李人厚[3]

(1. 上海航天技术研究院 预先研究处，上海　200233；
2. 西北工业大学 航天工程学院，陕西 西安　710072；
3. 西安交通大学 工程院，陕西 西安　710049)

摘　要：通过对伴随运动运动学的研究。推导出伴随卫星与主星相对运动运动学关系，论述了其三方面的应用；假设主星轨道为圆，推导了地心固连坐标系和主星轨道坐标系中的伴随运动方程(四种情况)，并通过分析得出伴随轨道的形状和特性。

关键词：伴随卫星；伴随运动；运动学

中图分类号：V412；P138　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2001)01-0001-05

伴随运动是指某一航天器在另一航天器附近的周期运动，其相对运动轨迹称为伴随轨道。伴随轨道可用于航天器间的编队飞行、互相观测、监视和救援等。伴随卫星是作伴随运动的卫星，为主星提供在轨服务，也可和主星组成局部星座。目前，对伴随运动的研究较少[1~3]。本文研究伴随运动的运动学特性，提供研究伴随卫星的的理论基础和实践参考。

1　伴随卫星与主星相对运动运动学关系与应用

1.1　伴随卫星与主星相对运动运动学关系

坐标系：主星轨道坐标系 $o_1x_1y_1z_1$。原点为主星质心 o_1，o_1x_1 轴沿位置矢量方向，o_1y_1 在轨道平面内，垂直 o_1x_1 轴指向前，o_1z_1 垂直轨道平面，形成右手直角坐标系。地心赤道坐标系 o_exyz。原点为地心 o_e，o_ex 轴在赤道面内，指向春分点，o_ez 轴垂直赤道面，与地球自转角速度矢量一致，o_ey 轴与 o_ex 轴和 o_ez 轴构成右手直角坐标系。地心赤道坐标系 o_exyz 到轨道坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 间的转换关系为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中，$R_{11} = \cos\Omega_1\cos u_1 - \sin\Omega_1\sin u_1\cos i_1$，$R_{12} = \sin\Omega_1\cos u_1 + \cos\Omega_1\sin u_1\cos i_1$，$R_{13} = \sin u_1\sin i_1$，$R_{21} = -\cos\Omega_1\sin u_1 - \sin\Omega_1\cos u_1\cos i_1$，$R_{22} = -\sin\Omega_1\sin u_1 + \cos\Omega_1\cos u_1\cos i_1$，$R_{23} = \sin i_1\cos u_1$，$R_{31} = \sin\Omega_1\sin i_1$，$R_{32} = -\cos\Omega_1\sin i_1$，$R_{33} = \cos i_1$。

伴随卫星在 o_exyz 中的坐标为 (x_2, y_2, z_2)，$x_2 = r_2(\cos\Omega_2\cos u_2 - \sin\Omega_2\sin u_2\cos i_2)$，$y_2 = r_2(\sin\Omega_2\cos u_2 + \cos\Omega_2\sin u_2\cos i_2)$，$z_2 = r_2\sin u_2\sin i_2$。

利用变换关系(1)，可得伴随卫星在 $o_1x_1y_1z_1$ 中的坐标

$$\begin{bmatrix} \rho_u \\ \rho_v \\ \rho_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}x_2 + R_{12}y_2 + R_{13}z_2 - r_1 \\ R_{21}x_2 + R_{22}y_2 + R_{23}z_2 \\ R_{31}x_2 + R_{32}y_2 + R_{33}z_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

收稿日期：2000-11-09
基金项目：国家“863”课题资助项目(863-2-4-4-2)
作者简介：王志刚(1968-)，男，陕西渭南人，博士后，主要从事飞行器动力学与控制研究.
李　卿(1942-)，男，上海人，博士生导师，主要从事卫星总体设计研究.
陈士橹(1920-)，男，浙江东阳人，中国工程院院士，主要从事飞行器动力学与控制研究.
李人厚(1940-)，男，四川人，博士生导师，主要从事自动控制与计算机应用研究.

此为伴随卫星相对主星的相对运动运动学关系。

1.2 伴随卫星与主星相对运动运动学关系的应用

利用伴随卫星相对主星的相对运动运动学关系，可以解决以下问题。

1)若主星运行轨道已知，当通过相对运动动力学方程中其它方法，确定了伴随轨道，则利用式(2)求伴随卫星运行轨道(x_2,y_2,z_2)，即

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{R}}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_u + r_1 \\ \rho_v \\ \rho_w \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中，

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{R}}' \tag{4}$$

2)若主星和伴随卫星的运行轨道已知，利用式(2)解算伴随轨道。

3)与 2)成逆问题，即由两航天器的伴随运动确定两个航天器的轨道。显然，这一逆问题比正问题 2)更有工程实际意义。

随着航天技术的发展，对航天器之间的伴随运动将会提出越来越多的要求，诸如，要求一个航天器围绕另一个航天器沿小椭圆飞行；一个航天器在另一个航天器前面作往复直线运动；一个航天器在另一个航天器后面沿小圆飞行；或多个航天器围绕一个航天器组成八卦阵和长蛇阵等。轨道设计师的任务，就是根据任务规定的伴随轨道，确定航天器的轨道参数。一般情况下，对伴随轨道的要求往往多于两点，无法由已知的伴随轨道直接解算出两个航天器的轨道参数。因此，要进行轨道拟合。

2 伴随运动运动学分析

假设主星轨道为圆，轨道半径和转速分别为 r、ω。

2.1 伴随卫星按圆轨道运行时的伴随运动分析

2.1.1 共面情况

伴随卫星的 r、ω 同主星相同。

1)在地心固连坐标系 o_exy 中(o_e 为地心，xy 为主星轨道平面，与地球固连)

主星 1：$$x_1 = r\cos\theta_1 = r\cos(\omega t + \varphi_1), y_1 = r\sin\theta_1 = r\sin(\omega t + \varphi_1) \tag{5}$$

伴随卫星 2：$$x_2 = r\cos\theta_2 = r\cos(\omega t + \varphi_2), y_2 = r\sin\theta_2 = r\sin(\omega t + \varphi_2) \tag{6}$$

伴随运动：$$\rho_x = x_2 - x_2 = A_x\sin(\omega t + \varphi), \rho_y = y_2 - y_1 = -A_x\cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

式中，ρ_x，ρ_y 为相对运动坐标，$A_x = 2r\sin\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$，$\varphi = \dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$。可见，在地心固连坐标系中，伴随轨道是以地心为圆心，以 A_x 为半径的圆(如图 1 所示)。

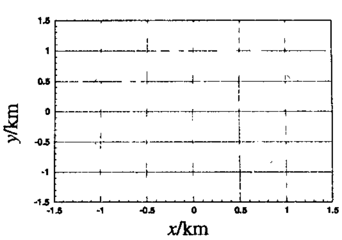


图 1　伴随轨道(oxy,ccp)

2)在轨道坐标系 $o_1x_1y_1$ 中(o_1 为主星质心，x_1 沿位置矢量，y_1 垂直 x_1 向前)

设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为 x_1，y_1 方向的单位矢量，伴随运动为

$$\begin{bmatrix} \rho_u \\ \rho_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2\cos\theta_1 + y_2\sin\theta_1 - r \\ -x_2\sin\theta_1 + y_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - r \\ r\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{bmatrix} \tag{8}$$

可见，在轨道坐标系中，伴随运动为固定点。

由式(8)可见，$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 的正负决定伴随卫星相对主星的前后，正则在前。其大小决定距离主星的远近，大则远。另外，ρ_u 始终不大于零，即伴随卫星在主星斜下方。

2.1.2 非共面情况

设两轨道平面夹角为 Ψ。

1)在地心固连坐标系 o_exyz 中

主星：$$x_1 = r\cos\theta_1 = r\cos(\omega t + \varphi_1), y_1 = r\sin\theta_1 = r\sin(\omega t + \varphi_1), z_1 = 0 \tag{9}$$

伴随卫星：$$x_2 = r\cos\theta_2 = r\cos(\omega t + \varphi_2), y_2 = r\sin\theta_2\cos\Psi = r\cos\Psi\sin(\omega t + \varphi_2),$$

$$z_2 = r\sin\theta_2\sin\Psi = r\sin\Psi\sin(\omega t + \varphi_2) \tag{10}$$

伴随运动：$\rho_x = x_2 - x_1 = A_x\sin(\omega t + \varphi_x)$，$\rho_y = y_2 - y_2 = A_y\sin(\omega t + \varphi_y)$，

$$\rho_z=z_2-z_1=z_2=r\sin\Psi\cos(\omega t+\varphi_2)=A_z\cos(\omega t+\varphi_z),A_x=-2r\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2},\varphi_x=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},$$
$$A_y=\sqrt{(r\cos\Psi\cos\varphi_2-r\cos\varphi_1)^2+(r\cos\Psi\sin\varphi_2-r\sin\varphi_1)^2},\varphi_y=\mathrm{arctg}\frac{r\cos\Psi\sin\varphi_2-r\sin\varphi_1}{r\cos\Psi\cos\varphi_2-r\cos\varphi_1} \tag{11}$$
$$A_z=r\cos\Psi,\varphi_z=\varphi_2$$

可见,伴随轨道是空间平面椭圆轨道,在 xy 面的投影是圆,在 xz 面的投影是直线。如图 2 所示。

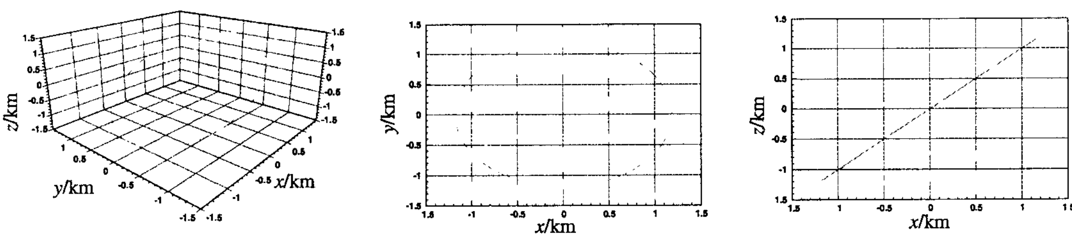


图 2　伴随轨道($o_e xyz$,ccn)

2)在轨道坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 中

伴随运动为

$$\begin{bmatrix}\rho_u\\ \rho_v\\ \rho_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\cos\theta_1+y_2\sin\theta_1-r\\ -x_2\sin\theta_1+y_2\cos\theta_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_u\cos(2\omega t+\varphi_u)+B_u\\ A_v\sin(2\omega t+\varphi_v)+B_v\\ A_z\sin(\omega t+\varphi_z)\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$A_u=\frac{r}{2}(1-\cos\Psi),\varphi_u=\varphi_1+\varphi_2,B_u=\frac{r}{2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)(1+\cos\Psi)-r$$

$$A_v=-\frac{r}{2}(1-\cos\Psi)=-A_u,\varphi_v=\varphi_1+\varphi_2=\varphi_u,B_v=\frac{r}{2}\sin(\varphi_2-\varphi_1)(1+\cos\Psi),A_z=r\sin\Psi,\varphi_z=\varphi_2$$

可见,在轨道坐标系中,轨道平面内的伴随运动(如图 3(a)所示)为圆,圆心为(B_u,B_v),半径为 A_u,角速度为 2ω。垂直轨道平面的伴随运动(如图 3(b)所示)为简谐振动,角速度为 ω;整个伴随轨道如图 3(c)所示。

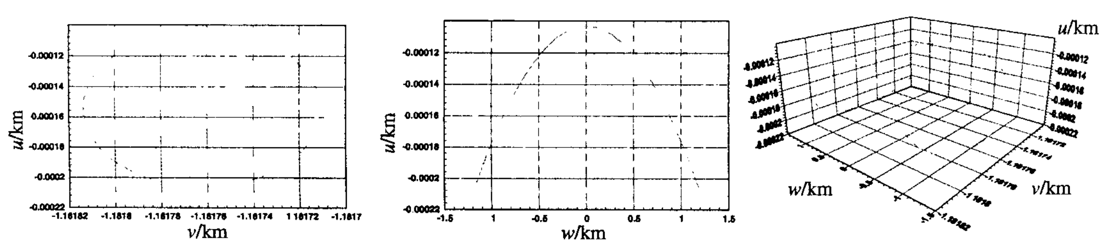


图 3　伴随轨道(ccn)

此外,B_u 始终不大于零,即伴随卫星在主星斜下方。又 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$,$\Psi$ 均很小,则 $B_u\approx0$。另外,$A_u=-A_v\approx0$,则轨道平面内的圆可看作一点。这样,整个伴随轨道可看作只有垂直轨道平面的直线摆动。$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 的正负决定轨道中心相对主星的前后,正则在前。其大小决定轨道中心距离主星的远近,大则远,Ψ 大小决定垂直轨道平面的振幅,大则振幅大。

2.2　伴随卫星按椭圆轨道运行时的伴随运动分析

2.2.1　共面情况

1)在地心固连坐标系 o_exy 中

主星 1:$x_1=r\cos\theta_1=r\cos(\omega t+\varphi_1)$,$y_1=r\sin\theta_1=r\sin(\omega t+\varphi_1)$ 　(13)

伴随卫星:$x_2=r_2\cos\theta_2$,$y_2=r_2\sin\theta_2$ 　(14)

$$r_2=\frac{p}{1+e\cos\theta_2},\theta_2=\int_0^t\omega_2\mathrm{d}t+\varphi_2,\omega_2=\frac{h}{r_2^2}=\frac{\sqrt{p\mu}}{r_2^2}$$

伴随运动：$\rho_x = x_2 - x_1 = r_2\cos(\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \varphi_2) - r\cos(\omega t + \varphi_1)$，

$$\rho_y = y_2 - y_1 = r_2\sin(\int_0^t \omega_2 dt + \varphi_2) - r\sin(\omega t + \varphi_1) \tag{15}$$

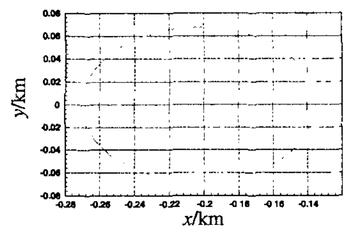


图 4 伴随轨道($o_e xy$,cep)

可见，伴随轨道是椭圆轨道，如图 4 所示。

2)在轨道坐标系 $o_1x_1y_1$ 中

伴随运动为

$$\begin{bmatrix}\rho_u\\ \rho_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\cos\theta_1 + y_2\sin\theta_2 - r\\ -x_2\sin\theta_2 + y_2\cos\theta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_2\cos(\theta_2-\theta_1) - r\\ r_2\sin(\theta_2-\theta_1)_1\end{bmatrix} \tag{16}$$

可见，伴随卫星相对主星的运动是以(0,0)为焦点的椭圆，如图 5 所示。

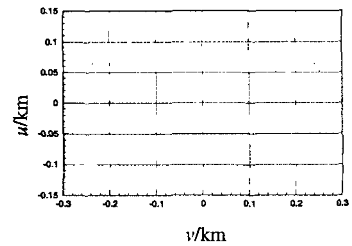


图 5 伴随轨道(cep)

2.2.2 非共面情况

设两轨道平面夹角 Ψ。

1)在地心固连坐标系 $o_e xyz$ 中

主星 1：$x_1 = r\cos\theta_1 = r\cos(\omega t + \varphi_1)$，

$$y_1 = r\sin\theta_1 = r\sin(\omega t + \varphi_1),\ z_1 = 0 \tag{17}$$

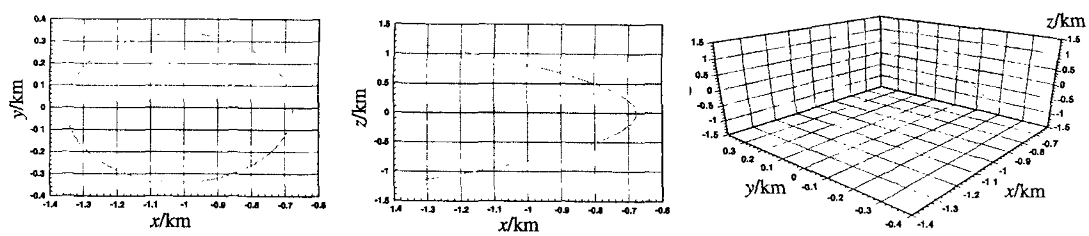
伴随卫星：$x_2 = r_2\cos\theta_2,\ y_2 = r_2\sin\theta_2\cos\Psi,\ z_2 = r_2\sin\theta_2\sin\Psi$ (18)

式中，$r_2 = \dfrac{p}{1+e\cos\theta_2},\ \theta_2 = \int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \varphi_2,\ \omega_2 = \dfrac{h}{r_2^2} = \dfrac{\sqrt{p\mu}}{r_2^2}$

伴随运动：$\rho_x = x_2 - x_1 = r_2\cos(\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \varphi_2) - r\cos(\omega t + \varphi_1)$

$$\rho_y = y_2 - y_1 = r_2\sin(\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \varphi_2)\cos\Psi - r\sin(\omega t + \varphi_1),\ \rho_z = z_2 - z_1 = z_2 = r_2\sin(\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \varphi_2)\sin\Psi \tag{19}$$

可见，伴随轨道是空间轨道，在 xy 面的投影是近椭圆，在 xz 面的投影是类抛物线状的轨道，如图 6 所示。



(a) (b) (c)

图 6 伴随轨道($o_e xyz$,cen)

2)在轨道坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 中

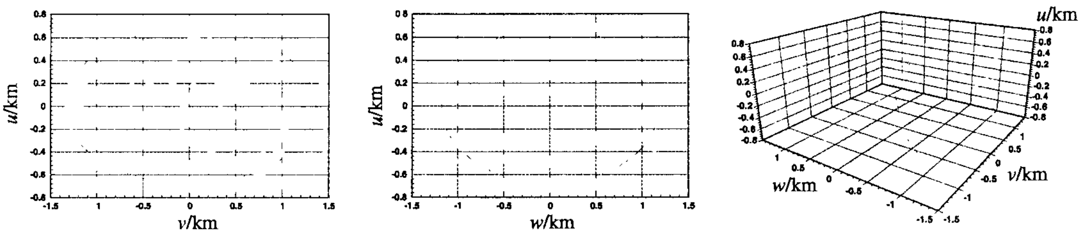
伴随运动为

$$\begin{bmatrix}\rho_u\\ \rho_v\\ \rho_w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\cos\theta_1 + y_2\sin\theta_1 - r\\ -x_2\sin\theta_1 + y_2\cos\theta_1\\ z_2\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\frac{r_2}{2}(1+\cos\Psi)\cos[\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t - \omega t + \varphi_2 - \varphi_1] + \frac{r_2}{2}\cos[\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \omega t + \varphi_2 + \varphi_1](1-\cos\Psi) - r\\ -\frac{r_2}{2}(1+\cos\Psi)\sin[\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t - \omega t - \varphi_1 + \varphi_2] - \frac{r_2}{2}\sin[\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \omega t + \varphi_2 + \varphi_1](1-\cos\Psi)\\ r_2\sin(\int_0^t \omega_2 \mathrm{d}t + \varphi_2)\sin\Psi\end{bmatrix} \tag{20}$$

$$(\rho_u + r)^2 + \rho_v^2 = 2(\frac{r_2}{2})^2\{(1 + \cos^2\Psi) + (1 - \cos^2\Psi)cos[2(\int_0^t \omega_2 dt + \varphi_2)]\} \tag{21}$$

所以,轨道平面内的运动(如图 7(a))是以(0,0)为焦点,以 r_p 为半径的近似椭圆,在这里 $r_p^2=2(\frac{r_2}{2})^2\{(1+\cos^2\Psi)+(1-\cos^2\Psi)\cos[2(\int_0^t \omega_2 dt+\varphi_2)]\}$。因为 Ψ 很小,则 $r_p^2\approx 2(\frac{r_2}{r})^2$,所以,垂直轨道平面的伴随运动(如图 7(b)所示)为简谐振动,角速度为 ω;整个伴随轨道如图 7(c)所示。



(a)　　(b)　　(c)

图 7　伴随轨道(cen)

3　结束语

本文研究了伴随卫星和主星的相对运动关系与应用,研究了相对运动方程和运动特性,为伴随卫星研究提供理论基础和实践借鉴。

参考文献:

[1] 肖业伦.航天器飞行动力学原理[M].北京:宇航出版社,1995.

[2] 王志刚.空间站伴随卫星控制技术研究(第 1,2,3 章)——国家高技术航天领域(863-2)项目报告[R].西安:西北工业大学航天工程学院,1998.

[3] 王志刚.空间站伴随卫星控制与航天器优化技术研究[D].西安:西北工业大学航天工程学院,1998.

Study on concomitant motion kinematics of concomitant satellite

WANG Zhi-gang[1], LI Qing[1], CHEN Shi-lu[2], LI Ren-hou[3]

(1. Advanced R&D Department, Shanghai Academy of Spaceflight Technology, Shanghai 200233, China; 2. College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, 710072, Xi'an, China; 3. Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, 710049, Xi'an, China)

Abstract: The paper studies concomitant motion kinematics. In kinematics, the kinematical relation of the relative motion between concomitant satellite and main satellite is deduced; the three applications of the kindematical relation are discussed. Supposing the main satellite orbit is circular, the concomitant motion equations with earth-fixed coordinate system and main satellite orbit-fixed coordinate system (in four cases) are deduced. Concomitant orbit shapes and characteristics are gained by analysis.

Key words: concomitant satellite; concomitant motion, kinematics.