

基于两阶段的民转军运输机军用装备载重平衡优化

李云飞¹, 徐吉辉¹, 吴文君², 赵向领³, 张传龙⁴

(1. 空军工程大学装备管理与无人机工程学院, 西安, 710051; 2. 93453 部队, 山西怀仁, 038300;

3. 中国民航大学空中交通管理学院, 天津, 300300; 4. 空军工程大学空管领航学院, 西安, 710051)

摘要 为深入挖掘民航货运运输机装载军用装备的潜力, 提高快速响应作战需求的能力, 为作战成功提供必要的军用装备和各类保障物资, 研究了民转军运输机的载重平衡问题。为准确获取军用装备在运输机货舱中的装载位置及方向, 选取了民航宽体货运飞机 B747-400F 改装机型为研究对象, 利用两阶段分解策略, 基于二维切割理论, 将运输机货舱视为一块矩形板, 待运载的军用装备视为多个长宽不同的矩形块, 建立了一种二维几何模型与运输机载重平衡相融合的优化模型。在二维几何位置约束模型中, 考虑了军用装备两两间位置不重叠且保持一定间距、不超货舱边界、可正交旋转的限制。在载重平衡优化模型中以重心偏差最小和装载量最大为目标函数, 考虑了运输机重量、业载、重心、货舱累积载荷、线性载荷、面积载荷等限制。设计了 Benders 分解算法, 将含有复杂约束问题的载重平衡优化模型, 分解为位置分配的主问题和重量平衡检查的子问题。使用 Gurobi 求解了两种算例场景用于验证模型。结果表明: 所建模型和算法可在合理的心重下快速有效确定军用装备的装载位置和方向, 提高了装载量, 为实现智能装载提供了参考和借鉴。

关键词 航空运输; 飞机装载; 军用装备; 载重平衡; Benders 分解

DOI 10.3969/j.issn.2097-1915.2025.03.006

中图分类号 V271.2; O221 **文献标志码** A **文章编号** 2097-1915(2025)03-0042-10

A Load Balance Optimization for Civil-to-Military Transport Aircraft Military Equipment Based on Two-Stage

LI Yunfei¹, XU Jihui¹, WU Wenjun², ZHAO Xiangling³, ZHANG Chuanlong⁴

(1. Equipment Management and Unmanned Aerial Vehicle Engineering School, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. Unit 93453, Huairan 038300, Shanxi, China; 3. School of Air Traffic Management, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China; 4. Air Traffic Control and Navigation School, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract In order to explore all the possibilities of civil cargo transport aircraft for loading military equipment, improve the ability to respond quickly to the needs of operations, and provide the necessary military equipment and various types of protective materials for operational success, weight and balance problems of civil-to-military transport aircraft are studied. To determine the loading position and orientation of military equipment in the cargo hold of an aircraft, the civil wide-body freight aircraft B747-400F modified

收稿日期: 2024-09-18

基金项目: 国家自然科学基金(52074309, 72461013)

作者简介: 李云飞(1996—), 男, 山西孟县人, 博士生, 研究方向为系统安全与适航管理。E-mail: 1241775743@qq.com

通信作者: 徐吉辉(1974—), 男, 山西闻喜人, 教授, 博士生导师, 研究方向为系统安全与适航管理。E-mail: Skyline6018@126.com

引用格式: 李云飞, 徐吉辉, 吴文君, 等. 基于两阶段的民转军运输机军用装备载重平衡优化[J]. 空军工程大学学报, 2025, 26(3): 42-51. LI Yunfei, XU Jihui, WU Wenjun, et al. A Load Balance Optimization for Civil-to-Military Transport Aircraft Military Equipment Based on Two-Stage[J]. Journal of Air Force Engineering University, 2025, 26(3): 42-51.

model is selected as the research object. An optimization model that integrates a two-dimensional geometric model with the load balance of transport aircraft is established by utilizing a two-stage decomposition strategy based on the two-dimensional cutting theory in consideration of the cargo hold of the transport aircraft as a rectangular plate, and military equipment as multiple rectangular items with varying lengths and widths. In the two-dimensional geometric position constraint model, constraints are considered for the non-overlapping positions of military equipment, maintaining a certain distance, not exceeding the cargo hold boundaries, and the possibility of orthogonal rotation. In the load balance optimization model, the objective function is to minimize the center of gravity (CG) deviation and maximize the payload in consideration of constraints such as the transport aircraft's weight, payload, CG, cargo hold cumulative load, linear load, and area load. A Benders decomposition algorithm is designed to decompose the load balance optimization model with complex issues containment into a master problem in position allocation and a sub-problem for weight balance checking. Gurobi is used to solve two example scenarios for model verification. The results indicate that the established model and the algorithm can quickly effectively determine the loading position and the orientation of military equipment under a reasonable CG, improving the payload, and providing references and insights for intelligent loading.

Key words air transport; aircraft loading; military equipment; load balance; Benders decomposition

近年来随着军民融合国家战略的日益深化,极大地推动了民转军运输机项目的实施和落地。民转军运输机可在作战演训中承担军用装备和各种保障物资的运输与投送,有效提高了作战保障能力,是作战任务成功的关键因素之一。

民用运输机是一种重要的战略补充资源,是多机型多军种联合作战的组成体系之一,是保障物资运输的重要组成部分,具有装载量大运输灵活方便的特点,这为特殊情况下运输军用装备物资提供了便利。为充分发挥民用运输机装载、运输、投送军用装备的能力,本文研究了民转军运输机装载军用装备的载重平衡问题。载重平衡问题简称配载,配载在“民转军”运输机中发挥着重要作用。通过配载优化可有效精准确定各军用装备的位置,不仅保证了飞机的安全运行,还为相关运输单位节省了大量燃油费用,从而达到降低飞行成本和污染物的排放。因此,研究民转军运输机的配载优化具有重要的实际意义。

面向作战任务民转军运输机所装载货物类型多样,几何尺寸多变,无法利用一维方法装载,多考虑物资装备的几何尺寸和重量利用二维方法装载,而三维方法因问题难度和复杂性较大,多应用于集装箱的装载。此外,军用装备的装载是在飞机货舱内只装载一层,一方面是出于保护装备不受破坏,维护其完整性,另一方面受装备高度限制,如大型无人机、汽车、坦克等装备的装载。因此,军用装备通常并不是装载多层,属于是一种二维装载的科学优化问题,可以直接利用二维方法研究解决。

一维的配载工作简化了货物的装载问题,降低

了问题难度,实现了货物位置的合理分配和重心的优化^[1-8],保证了飞机的安全运行,提升了机场保障的操作效率,减少了中间机场的额外装卸操作次数^[7-9],并将载重平衡与飞行路径规划、取货交付问题集成研究,达到节省燃油成本、降低碳排放的目的^[3]但仍是将货物视为是质点研究,未考虑货物的装载特征,如装载位置坐标和装载方向。

飞机的二维配载方面,文献[10]考虑了运输机的多种体积、重量、重心约束,基于二维装箱的遗传算法,提出了一种混合算法求解运输机装载多种不同类型的货物,实现燃油消耗最少的装载布局。文献[11]考虑了二维装箱的空间约束、运输机的载荷限制、平衡限制、货物以及飞机的时间限制,提出了一种禁忌搜索算法解决动态的空运装载问题。文献[12]建立了一种以重心偏差最小为目标函数的混合整数线性规划模型,以解决军用飞机货舱中一系列货物装载平衡问题,考虑了货物的二维划分问题。但模型中仅考虑空间和重心约束,未考虑货舱地板承载重量以及货舱累积区间限重。文献[13]为解决混合载荷航空运输问题,提出了一种基于二维装箱算法的禁忌搜索算法,目标函数是实现使用飞机数量最少。文献[14]考虑重心、两侧装载约束情况下,建立了二维装载数学模型,设计了混合启发式算法,对飞翼车的装载模型进行求解。二维装载模型的应用较好地解决了大型货物的装载,为后续研究提供了支撑。但当前的二维配载约束模型并不完善,还需全面考虑与飞机结构相关的多种载荷限制。

三维装箱问题的研究可以提升集装箱的利用率,减少浪费获得较好的经济效益,但没有考虑飞机

载重平衡^[15-25]约束。综上所述,针对民转军飞机装载军用装备的载重平衡问题,二维飞机配载模型既需要考虑飞机的载重平衡约束又需要考虑各装备几何尺寸的二维位置分配问题。为实现各装备的合理装载,将运输机货舱视为矩形板,军用装备简化为矩形块,建立两阶段的二维几何位置匹配关系的载重平衡模型,即在第一阶段的二维几何位置约束模型中考虑各装备不重叠放置、不超货舱边界、正交旋转等约束,在第二阶段的载重平衡优化模型中考虑飞机的多种重量限制、重心稳定性等约束。

1 问题描述

民转军运输机指的是将民用飞机改装为军事用途的飞机。改装后民用飞机中军用装备的装载位置的确定是极其重要的。民转军运输机与原货机相比在装载货物类型上发生了较大变化。民用飞机作为商业运营,各航空公司为实现运营利润最大,多运输标准化的集装箱,这些集装箱具有国际航空运输协会注册的唯一编码,规格相对统一;民用飞机出厂时也设置了与集装箱相匹配的预定义货舱,因此标准的集装箱与现有飞机货舱是一一匹配的指派分配关系。民用飞机设计研制阶段就考虑飞机结构与强度,各货舱具有装载不同类型集装箱的承载能力,并且在实际运行中航空公司也有着一套自身专属的配载操作流程。载重平衡单规定了各货舱舱位的预定义位置,货舱累积限制重量,横向和纵向平衡限制、各种线性载荷限制和重量限制、重心包线限制等。

民转军运输机多装载长宽不一致的军用装备,在实际运行中无法按照现有民用飞机货舱舱单进行位置分配,在科学问题研究上无法利用现有民用飞机装载集装箱的方法及模型实现军用装备的位置分配,军用装备的装载是一种具有二维几何约束关系的问题,需要考虑各装备的位置分配几何约束,如装备不超货舱边界、装备间不重叠、可正交旋转等。

民转军运输机与原货机相比在载重平衡上也存在着较大的不同。为装载军用装备民用飞机需增加货舱地板、扩大舱门。另一方面使得民用飞机的重心、空机重量、指数、力臂、载荷等对飞机配载影响较大的参数发生变化,因此需要对飞机重新进行合理的称重,获取新的配载参数,显然配载的本质发生了变化。

民转军后,飞机货舱用于装载军用装备,与规格标准的集装箱相比重量较大,需要使用垫板增大接触面面积载荷,各装备的质量差异较大,需要考虑各区间线性载荷限制和累积重量限制以及横纵两向的平衡限制。因此,本文研究动机是建立民转军运输机装载军用装备的装载平衡优化理论模型,为实现

军用装备的精准装载奠定研究基础。

2 模型建立

2.1 模型概述

本文选取民用宽体机 B747-400F 为研究对象进行民转军载重平衡建模与求解。B747-400F 最初是美空军为军事需求所研制,定位是一款大型战略运输机,后发展成为民用,现阶段已投入到多家航空公司经营使用。B747-400F 前后货舱都设计了舱门,并且有着硕大的机鼻门,非常便于大尺寸的军用装备装载和卸载。

运输机的配载一方面要充分利用运力,实现装载量最大;另一方面要确保飞机运行安全,使得重心偏差最小,实现运输机横纵向平衡,以节省燃油消耗。假设某批需要装载运输的军用装备,将其按照约束限制分配到飞机货舱的不同位置,为二维几何约束问题。二维几何约束的运用可以将独立的货舱作为一段连续的区间,为军用装备划分位置。而载重平衡模型可以限制运输机的各种重量和线性载荷以及横纵向平衡,实现飞机的稳定和安全。本文按照各阶段所需要实现的目的,分别依次建立各模型。

2.2 军用装备二维几何位置约束模型

为实现民转军运输机二维几何约束模型和载重平衡优化模型的仿真和分析,作出以下假设:

- 1) 同一类型的军用装备是密度固定的矩形匀质块,默认重心为军用装备的中心。
- 2) 运输机货舱为矩形,且军用装备不受运输机舱门的影响,忽略货舱及舱门高度的影响。
- 3) 军用装备为单层装载模式,忽略多层重叠堆积装载。
- 4) 忽略飞行过程中燃油消耗对重心变化的影响。

为确定军用装备在运输机机舱内的放置位置及方向,建立了如图 1 的笛卡尔坐标系,图 1 是一种可能的一种军用装备装载方案,默认军用装备放置方向为长边 l 与 x 轴平行,宽边 w 与 y 轴平行,如果发生旋转则平行关系互换。设军用装备的左下角坐标点为 (x_i, y_i) 用于决策装备的放置位置,横向放置为装备默认装载方向。

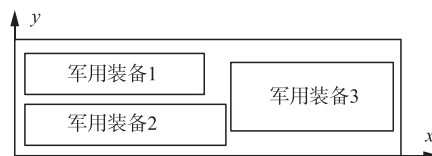


图 1 军用装备装载布局

Fig. 1 Military equipment loading layout

引入决策变量 t_i , 确定军用装备的装载状态, 如

式(1)所示:

$$t_i = \begin{cases} 1, \text{装备 } i \text{ 放置到货舱内} \\ 0, \text{否则} \end{cases}, \forall i \in N_R \quad (1)$$

式中: N_R 为军用装备的集合。

军用装备的旋转为提高运输机货舱面积利用率提供了可能,式(2)用于确定军用装备正交旋转放置:

$$z_i = \begin{cases} 1, \text{装备 } i \text{ 平行于 } x \text{ 轴装载} \\ 0, \text{装备 } i \text{ 平行于 } y \text{ 轴装载} \end{cases}, \forall i \in N_R \quad (2)$$

为使得运输机货舱内军用装备 i 和 j 两两间不重叠放置,引入辅助变量式(3)~式(6)将军用装备区分为左右上下相对独立的位置:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{装备 } i \text{ 在装备 } j \text{ 的左边} \\ 0, \text{否则} \end{cases}, \forall i \in N_R \quad (3)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{装备 } i \text{ 在装备 } j \text{ 的右边} \\ 0, \text{否则} \end{cases}, \forall i \in N_R \quad (4)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{装备 } i \text{ 在装备 } j \text{ 的上边} \\ 0, \text{否则} \end{cases}, \forall i \in N_R \quad (5)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{装备 } i \text{ 在装备 } j \text{ 的下边} \\ 0, \text{否则} \end{cases}, \forall i \in N_R \quad (6)$$

因此运输机装载军用装备的二维几何约束模型如式(7)~式(17)。

式(7)和式(8)表示军用装备 i 与 j 在 x 轴方向两两间不重叠,且保持一定间隔。

$$x_i + l_i z_i + w_i(1 - z_i) + s \leq x_j + (1 - a_{ij})M \quad (7)$$

$$x_j + l_j z_j + w_j(1 - z_j) + s \leq x_i + (1 - b_{ij})M \quad (8)$$

式中: M 为一个大数; s 为军用装备之间、军用装备和货舱内壁之间的间隔距离, s 取值参考国军标为 300 mm^[26]。

式(9)和式(10)表示军用装备 i 与 j 在 y 轴方向两两间不重叠。

$$y_i + l_i z_i + w_i(1 - z_i) + s \leq y_j + (1 - c_{ij})M \quad (9)$$

$$y_j + l_j z_j + w_j(1 - z_j) + s \leq y_i + (1 - d_{ij})M \quad (10)$$

式(11)中左侧变量 a_{ij} 、 b_{ij} 、 c_{ij} 、 d_{ij} 至少其中一个必须等于 1,则军用装备 i 和 j 在 x 轴和 y 轴上都不会发生重叠。

$$a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} \geq t_i + t_j + 1 \quad (11)$$

式(12)表示军用装备 i 只能在 j 的左边或右边。

$$a_{ij} + b_{ij} \leq 1 \quad (12)$$

式(13)表示军用装备 i 只能在 j 的上边或下边。

$$c_{ij} + d_{ij} \leq 1 \quad (13)$$

式(14)表示军用装备 i 不超出货舱的长边 L ,且右边界与货舱留有一定间距。

$$x_i + l_i z_i + w_i(1 - z_i) + s \leq L + (1 - t_i)M \quad (14)$$

式(15)表示军用装备 i 不超出货舱的宽边 W ,且上边界与货舱留有一定间距。

$$y_i + w_i z_i + l_i(1 - z_i) + s \leq W + (1 - t_i)M \quad (15)$$

式(16)表示军用装备在左边界与货舱留有一定间距。

$$s \leq x_i + (1 - t_i)M \quad (16)$$

式(17)表示军用装备在下边界与货舱留有一定间距。

$$s \leq y_i + (1 - t_i)M \quad (17)$$

2.3 军用装备载重平衡优化模型

军用装备有着一定的特殊性,与标准化的集装器相比在重量和尺寸上具有较大区别,因此需要依据装载运输要求实现军用装备的精准装载,确定其装载位置坐标和装载方向。在这一过程中首要保障的是运输机的各种重量限制和稳定约束符合装载要求。因此建立以下的运输机装载军用装备的配载优化模型,如式(18)~式(22)所示。

式(18)为目标函数最大化装载重量。

$$\max \sum_{i=1}^{N_R} q_i t_i \quad (18)$$

式中: q_i 为装备 i 的重量。

式(19)表示目标函数要求实现运输机起飞重心与目标重心偏差最小,最大化地保证运输机的飞行安全和燃油费用的节省,力求运输效益最佳。

$$\min |P_{\text{CGTOW}} - P_{\text{CGT}}| \quad (19)$$

式中: P_{CGTOW} 为飞机的起飞重量对应的重心; P_{CGT} 为飞机的指定目标重心。

式(20)~式(22)分别为运输机的起飞重量、无油重量、着陆重量限制。其中起飞重量和着陆重量限制是受飞机的结构强度和起降场各种影响飞机性能的环境要求等所限制;无油重量限制是受运输机机翼产生的升力所影响的,防止较大的剪切力而对运输机的机翼产生金属疲劳和出现微小裂纹。

$$W_{\text{OEW}} + W_{\text{TOF}} + \sum_{i=1}^{N_R} q_i t_i \leq W_{\text{TOW}} \quad (20)$$

$$W_{\text{OEW}} + \sum_{i=1}^{N_R} q_i t_i \leq W_{\text{ZFW}} \quad (21)$$

$$W_{\text{OEW}} + W_{\text{RF}} + \sum_{i=1}^{N_R} q_i t_i \leq W_{\text{LW}} \quad (22)$$

式中: W_{TOW} 为飞机的最大起飞重量; W_{ZFW} 为飞机的最大无油重量; W_{LW} 为飞机的最大着陆重量; W_{OEW} 为空机重量; W_{TOF} 为起飞燃油重量; W_{RF} 为飞机的备用燃油重量。

式(23)是运输机的最大业载限制。

$$\sum_{i=1}^{N_R} q_i t_i \leq W_{MPL} \quad (23)$$

式中: W_{MPL} 为飞机的最大业载重量。

$$I_{TOW_min} \leq I_{TOW} \leq I_{TOW_max} \quad (24)$$

$$I_{ZFW_min} \leq I_{ZFW} \leq I_{ZFW_max} \quad (25)$$

$$I_{LW_min} \leq I_{LW} \leq I_{LW_max} \quad (26)$$

式(24)~式(26)是运输机在起飞重量、无油重量、着陆重量下的稳定性平衡。这3者的重心稳定性和起飞重心被限制和确定后,飞机重心在各阶段均将在重心包线内移动。可忽略燃油消耗带来的重心变化。飞机有多种方法表示稳定性平衡约束,此约束限制是以指数形式表达的,各重量的稳定性指数计算方式如式(27)。式(27)为运输机的主货舱的各舱位的重量限制。

$$W_k \leq W_{k_max} \quad (27)$$

式中: W_{k_max} 为舱位 k 的最大重量; W_k 为舱位 k 分配的业载。

式(28)为货舱区域限制重量。

$$W_l \leq W_{l_max} \quad (28)$$

式中: W_l 为区域 l 所分配的重量; W_{l_max} 为区域 l 的最大重量限制。 W_l 的计算方式与 W_k 的计算方式一致。

式(29)和(30)分别为运输机各货舱区域的面积载荷和线性载荷限制。

$$\frac{W_l}{z_l w_l} \leq S_{W_{l_max}} \quad (29)$$

$$\frac{W_l}{z_l} \leq L_{W_{l_max}} \quad (30)$$

式中: $S_{W_{l_max}}$ 为运输机货舱区间 l 的最大面积载荷限制; $L_{W_{l_max}}$ 为运输机货舱区间 l 的最大线性载荷限制; z_l 和 w_l 分别为货舱区间 l 的长和宽。

式(31)为运输机的货舱左右载荷限制。

$$\begin{cases} W_{k_L} \leq a_{\text{unsym}} W_{k_R} + b_{\text{unsym}} \\ W_{k_R} \leq a_{\text{unsym}} W_{k_L} + b_{\text{unsym}} \end{cases} \quad \forall (k_L, k_R) \in s_p \quad (31)$$

式中: W_{k_L} 和 W_{k_R} 分别为运输机以纵轴为对称轴形成的左货舱 k_L 和右货舱 k_R 的分配的重量,通过式(40)计算获取。 a_{unsym} 和 b_{unsym} 为线性系数; s_p 为 k 货舱并排的左右位置集合。

在实际运营中运输机重心通常会使用%MAC平均空气动力的比例长度表示。%MAC是飞机起飞重心力臂 B_{TOW} 距平均空气动力弦前端的长度 L_{EMAC} 占平均空气动力弦长 L_{MAC} 的百分比。

$$\%MAC = \frac{(B_{TOW} - L_{EMAC})}{L_{MAC}} \times 100\% \quad (32)$$

而飞机重心力臂 B_{TOW} 的计算通常使用的是合力矩定理,即运输机各部分的力矩之和等于运输机整体的力矩,设产生力矩的有空机重 W_{OEW} 、起飞燃油重量 W_{TOF} 、各装备 q_i , 3者对应的力矩分别是 B_{OEW} 、 B_{TOF} 、 X_i , 则运输机的起飞力臂 B_{TOW} 为:

$$B_{TOW} = \frac{W_{OEW} B_{OEW} + W_{TOF} B_{TOF} + \sum_{i=1}^{N_R} q_i X_i t_i}{W_{OEW} + W_{TOF} + \sum_{i=1}^{N_R} q_i t_i} \quad (33)$$

式中: 业载 q_i 对应的力臂 X_i 表示军用装备的中心横坐标,则军用装备 i 的中心坐标 (X_i, Y_i) 计算式如下:

$$X_i = x_i + \frac{1}{2} l_i z_i + \frac{1}{2} w_i (1 - z_i) \quad (34)$$

$$Y_i = y_i + \frac{1}{2} w_i z_i + \frac{1}{2} l_i (1 - z_i) \quad (35)$$

$$I_{TOW} = I_{OEW} + F I_{TOW} + \sum_{i=1}^{N_R} I_{EQ_i} \quad (36)$$

$$I_{ZFW} = I_{OEW} + \sum_{i=1}^{N_R} I_{EQ_i} \quad (37)$$

$$I_{LW} = I_{OEW} + F I_{LW} + \sum_{i=1}^{N_R} I_{EQ_i} \quad (38)$$

式中: I_{OEW} 为运输机的空机重指数; $F I_{TOW}$ 为起飞重量对应的燃油指数; $F I_{LW}$ 为着陆重量对应的燃油指数; I_{EQ_i} 为军用装备的指数,其计算式如下:

$$I_{EQ_i} = \frac{q_i (X_i + B_C - C_D) t_i}{C_1} \quad (39)$$

式中: C_D 为平衡基准点; C_1 为缩小系数; B_C 为力臂修正值。

由军用装备的装载问题特性可知,直接建立基于二维几何约束关系的装载与配载模型难度较大,为降低建模难度将利用原货舱的舱位重量限制。首先分析可知,如图2的货舱 k 的重量可能由4部分组成,分别是落入货舱 k 的部分重量 i_1 、 i_2 , 完全落入舱位 k 中的重量 i_3 部分,占据多个舱位的 i_4 部分重量。其中跨区间的部分重量通过按长度比例计算,如式(40)中部分 i_1 和 i_2 的重量计算方式,是其落入货舱 k 的长度与总长度的比值与重量成正比例关系。

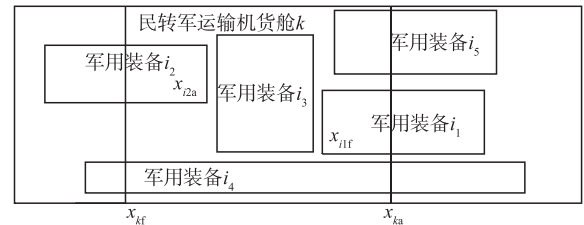


图2 货舱 k 部分装备跨货舱装载分配

Fig. 2 Equipment trans-cargo compartment loading allocation for compartment k

$$W_k = \sum_{i_1}^{N_R} \frac{x_{a_{i_1}} - x_{i_{1f}}}{l_{i_1} z_{i_1} + w_{i_1} (1 - z_{i_1})} q_{i_1} t_{i_1} + \sum_{i_2}^{N_R} \frac{x_{i_{2a}} - x_{kf}}{l_{i_2} z_{i_2} + w_{i_2} (1 - z_{i_2})} q_{i_2} t_{i_2} + \sum_{i_4}^{N_R} \frac{x_{ka} - x_{kf}}{l_{i_4}} q_{i_4} t_{i_4} + \sum_{i_3}^{N_R} q_{i_3} t_{i_3}, \forall i_1, i_2, i_3, i_4 \in N_R \quad (40)$$

式中: $x_{i_{1f}}$ 和 $x_{i_{2a}}$ 分别是第 i_1 个军用装备的左下角横坐标和第 i_2 个军用装备的右下角横坐标。 x_{kf} 和 x_{ka} 分别为货舱 k 的前坐标点和后坐标点。

3 算法设计

军用装备装载方案的生成,一方面是复杂的二维几何约束模型,要求实现军用装备的位置划分,另一方面是载重平衡模型,要求实现军用装备重量的合理分配。直接求解复杂度较高,程序运行时间长。对此拟运用 Benders 分解算法^[27]将复杂的军用装备装载平衡问题,分解为位置分配的主问题和含有重量平衡检查的子问题。

其中主问题是以式(18)业载量最大和式(19)重心偏差最小为目标函数,以式(7)~式(17)二维几何模型为约束。子问题是以式(20)~式(31)为军用装备的重量平衡检查约束。

执行算法程序的过程中首先求解主问题,得到初始解 $x^*(n)$,然后使用子问题检查解 $x^*(n)$ 。如果通过检查则输出最优解 $x^*(n)$;如果没有通过检查,则在主问题中增加一个 Benders' Cut 约束,用于阻止重复解的生成。同时,再次求解经修正的主问题,得到新解 $x^*(n+1)$,再次使用子问题检查解 $x^*(n+1)$ 。重复上述过程直到达到迭代次数 $\text{Max } k$,输出产生最优解。此算法的流程如图 3 所示。

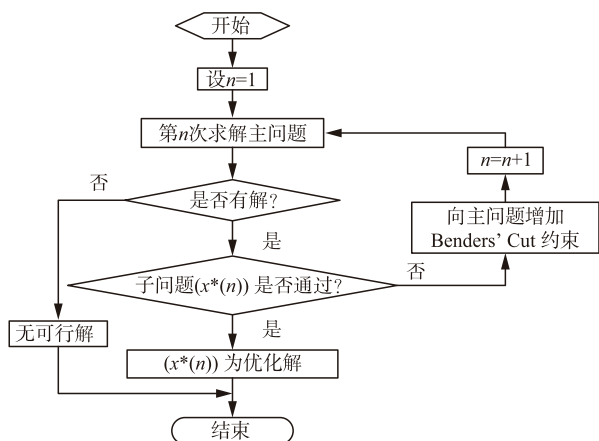


图 3 Benders 分解算法流程

Fig. 3 Benders algorithmic process decomposition

算法迭代的过程中将会从主问题中获得的初始

解加入到子问题中检查,如若没有将主问题作出针对性修正,则在新一轮的计算中可能会得到上一轮的重复解,拖累了可行解的获取。因此通过增加设置 Benders' Cut 的目的是将不满足重量约束检查的重复解过滤掉,逐轮缩小解空间,以提高获得可行解的概率,加快求解速度。

Benders' Cut 约束为:

$$\sum_{i=1}^{N_R} |t_i - t_i^*(n)| + \sum_{i=1}^{N_R} |x_i - x_i^*(n)| + \sum_{i=1}^{N_R} |y_i - y_i^*(n)| > 0 \quad (41)$$

4 试验与仿真

算法程序拟使用商业求解软件 Gurobi 11.02 验证模型。程序运行硬件环境为第 8 代酷睿 i5, 1.6 GHz 处理器, 8 GB RAM; 软件环境为 Win10 操作系统, 编程环境为 Anaconda 3 Spyder Python 8。

4.1 算例参数

为验证模型和算法选取公开发表的学术文献[12]的 C-5 运输机部分运载货物数据作为本文军用装备实验测试数据。对此将实验测试数据设置了 2 组不同规模的情况。首先根据装备面积算例分为装备面积大于货舱面积和小于货舱面积的 2 种场景, 按照装备数量分 3 组不同的算例分别是 20、10、5; 其次按照军用装备的重量设置了混装重量、大重量、中重量和小重量 4 组, 每组 4 个共 16 个算例, 用以验证不同类型重量的军用装备装载效果。表 1 是改装机型的基本参数, 包含了最大起飞重量、着陆重量、最大无油重量等。表 2 是飞机的多种重量限制和货舱长度, 包含了各舱位载荷、舱位区间限制、面积载荷、线性载荷、各舱位间距和舱位区间间距。

表 1 改装机型基本参数

Tab. 1 Basic parameters of modified aircraft models

参数	数值	参数	数值
W_{TOW}/kg	396 893.00	I_{OEI}	66.90
W_{LW}/kg	295 742.00	W_{TOF}/kg	120 000.00
W_{ZFW}/kg	276 691.00	W_{RF}/kg	20 000.00
W_{OEI}/kg	158 765.00	FI_{TOW}	-13.00
W_{MPL}/kg	112 362.00	FI_{LW}	-1.40
L_{EMAC}/m	31.95	C_1	300 000.00
L_{MAC}/m	8.33	C_D/m	33.62
L/m	54.13	$P_{CGTOW}/\%MAC$	23.00
W/m	6.50	B_C/m	5.79

4.2 算例分析

表 3 为不同面积场景算例装载结果,其中 PL 为业载量、 S 为货舱面积利用率、 T 为求解时间、 ΔCG 为重心偏差。Gurobi * 为具有 Benders 分解算法的方法。由表 3 可知,在目标函数(18)下 2 种方法得到的业载量、面积利用率均相同,平均分别为 75 608 kg、71.36%;而重心偏差却不一致,这是因

为各装备的装载位置不一致;各算例的重心处于重心包线之内,维持了飞机的稳定性;在求解时间上使用了 Benders 分解算法的 Gurobi * 方法平均为 57.84 s,而未使用分解算法的 Gurobi 方法平均为 1 092.61 s,针对货物数量为 20 的算例,与 Gurobi 方法相比具有 Benders 分解算法的 Gurobi * 程序运行时间大幅减少平均仅为 161.86 s。

表 2 货舱重量限制及长度
Tab. 2 Cargo hold weight limit and length

舱位	舱位间距/m	舱位最大重量/kg	舱位区间 间距/m	舱位区间 最大重量/kg	舱位区间最大面积 载荷/(kg·m ⁻²)	舱位区间最大线性 载荷/(kg·m ⁻¹)
A1	5.94~8.40	3 674				
A2	8.40~10.86	3 674	5.94~13.34	11 450	1 952.63	1 515.75
B1	10.86~13.34	3 674				
C	13.34~16.52	9 714				
D	16.52~19.72	9 714	13.34~26.14	36 627	1 952.63	3 035.43
E	19.72~22.91	9 714				
F	22.91~26.14	9 714				
G	26.14~29.31	16 574				
H	29.31~32.51	16 574	26.14~39.94	63 140	1 952.63	5 177.17
J	32.51~35.71	16 574				
K	35.71~39.94	9 714				
L	39.94~42.11	9 714				
M	42.11~45.30	9 714				
P	45.30~48.50	9 714	39.94~56.34	56 907	1 952.63	7 141.73
R	48.50~53.09	9 714				
S	53.09~56.34	9 714				
T	56.34~60.07	2 041	56.34~60.07	2 041	487.61	641.73

表 3 不同面积场景装载结果
Tab. 3 Loading results for different area scenarios

类型	数量	算例	Gurobi				Gurobi *			
			PL /kg	S /%	T /s	ΔCG /° MAC	PL /kg	S /%	T /s	ΔCG /° MAC
小于货 舱面积	20	1-1	91 257	87.33	3 604.90	2.85	91 257	87.33	173.56	1.46
		1-2	98 537	88.71	3 600.52	2.28	98 537	88.71	175.66	1.58
		1-3	93 548	88.69	3 606.35	1.20	93 548	88.69	166.32	2.53
	10	1-4	78 898	70.23	0.23	2.11	78 898	70.23	1.42	1.52
		1-5	69 166	67.99	2.10	2.33	69 166	67.99	1.71	1.58
		1-6	79 070	62.20	0.57	1.63	79 070	62.20	1.29	1.41
		1-7	89 059	72.24	0.35	2.95	89 059	72.24	1.65	1.50
	5	1-8	83 424	60.07	0.79	1.66	83 424	60.07	2.87	1.16
		1-9	76 157	69.64	0.78	2.49	76 157	69.64	1.95	1.73
		1-10	58 407	62.12	0.11	2.26	58 407	62.12	2.73	1.26
大于 货舱 面积	20	2-1	88 424	85.89	3 604.45	2.32	88 424	85.89	203.50	2.12
		2-2	90 466	88.43	3 821.70	2.65	90 466	88.43	156.31	1.36
		2-3	93 030	88.43	3 603.04	2.15	93 030	88.43	95.78	1.98

续表

类型	数量	算例	Gurobi				Gurobi *			
			PL/kg	S/%	T/s	$\Delta CG/\%$ MAC	PL/kg	S/%	T/s	$\Delta CG/\%$ MAC
大于 货舱 面积	10	2-4	46 784	74.77	0.09	1.63	46 784	74.77	1.37	1.87
		2-5	69 235	70.26	2.95	1.96	69 235	70.26	0.96	1.98
		2-6	78 977	69.02	0.12	2.32	78 977	69.02	1.32	2.68
		2-7	88 806	81.41	1.56	1.68	88 806	81.41	1.45	2.45
	5	2-8	59 264	71.22	0.67	1.36	59 264	71.22	165.00	2.32
		2-9	38 354	31.30	0.20	2.54	38 354	31.30	0.88	1.25
		2-10	41 313	37.29	0.59	2.45	41 313	37.29	0.98	1.48
均值			75 608	71.36	1 092.61	2.14	75 608	71.36	57.84	1.76

图 4 和图 5 分别是算例 2-3 在正交旋转和不可正交旋转下的装载结果。

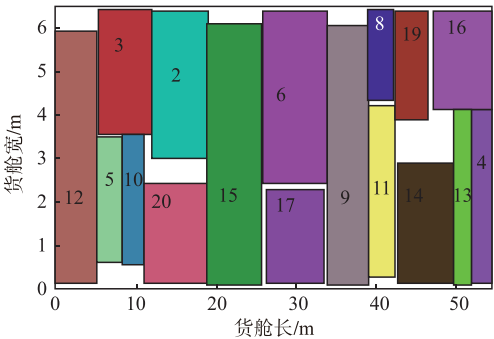


图 4 算例 2-3 正交旋转

Fig. 4 Orthogonal rotation example 2-3

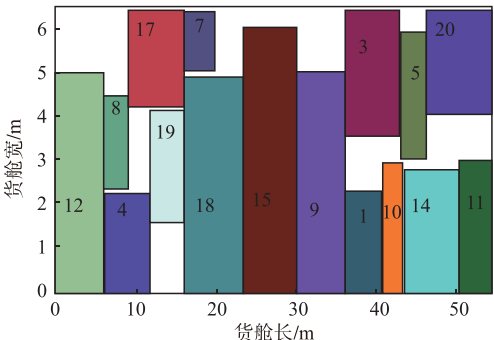


图 5 算例 2-3 不可正交旋转

Fig. 5 Non-orthogonal rotation example 2-3

图 4 的装载量为 93 030 kg,货舱面积利用率为 88.43%,重心偏差为 2.15%MAC,装载了 17 个军用装备,其中军用装备 2、4、6、9、11、12、16 相对于数

据输入方向发生了正交旋转,装载方向相对于其他军用装备也发生了变化。图 5 的装载量为 87 572 kg,货舱面积利用率为 78.58%,重心偏差为 2.43%MAC,装载了 16 个军用装备。图 4 和图 5 装载了 13 个相同的军用装备,如军用装备 3、4、5、8、9、10、11、12、14、15、17、19、20,这其中发生正交旋转的有军用装备 4、9、11、12。由图 4 和图 5 可知正交旋转约束的添加使得飞机装载量和货舱面积利用率得到了有效利用,而重心偏差变化较小,这是因为均有重心约束的限制。

表 4 是不同重量场景下的装载结果。针对大量的场景规模,由于装载的军用装备重量较大,平均装载量为 112 115 kg,在最大业载限制式(23)下,装载军用装备数量较少平均为 8 个,货舱面积利用率较低,平均为 45.69%;针对中等重量场景和小重量场景,平均装载量较为接近分别为 102 176 kg 和 103 454 kg,货舱面积利用率分别平均为 82.77%和 81.97%,这是因为中等重量场景装载军用装备数量平均为 13 个,小重量场景装载军用装备平均为 20 个,因装载数量较多,需要耗费大量时间 3 600.97 s 得到装载方案;混装重量场景下,平均装载量为 103 178 kg,货舱面积利用率为 77.87%。4 种场景下相较于 Gurobi,使用具有 Benders 分解的 Gurobi * 大幅提高了求解时间,平均为 219.22 s。重心偏差在重心约束限制下均维持在重心包线内,符合运载要求。

表 4 不同重量场景装载结果

Tab. 4 Loading results for different weight scenarios

类型	数量	算例	Gurobi				Gurobi *			
			PL/kg	S/%	T/s	$\Delta CG/\%$ MAC	PL/kg	S/%	T/s	$\Delta CG/\%$ MAC
大重量	40	3-1	112 290	43.76	102.31	1.93	112 290	43.76	63.25	2.05
	40	3-2	111 750	47.59	1.56	2.36	111 750	47.59	5.32	1.33
	40	3-3	112 290	43.76	16.44	2.01	112 290	43.76	5.98	1.82
	40	3-4	112 290	47.67	151.44	1.56	112 290	47.67	42.32	2.96

续表

类型	数量	算例	Gurobi				Gurobi *			
			PL/kg	S/%	T/s	$\Delta CG/\%$ MAC	PL/kg	S/%	T/s	$\Delta CG/\%$ MAC
中重量	50	4-1	101 510	83.79	3 600.47	2.32	101 510	83.79	400.32	1.22
	50	4-2	108 145	82.72	3 609.30	2.01	108 145	82.72	362.12	2.11
	50	4-3	98 129	83.89	3 600.72	1.66	98 129	83.89	302.36	1.92
	50	4-4	100 921	80.69	3 601.38	2.04	100 921	80.69	345.87	2.53
小重量	52	5-1	88 582	85.32	3 659.55	1.98	88 582	85.32	401.65	2.19
	54	5-2	103 168	77.69	3 602.02	2.24	103 168	77.69	245.98	1.51
	54	5-3	110 966	81.28	3 602.92	2.26	110 966	81.28	175.22	2.89
	58	5-4	111 098	83.57	3 604.17	2.41	111 098	83.57	210.69	2.60
混装重量	39	6-1	103 587	79.14	3 699.04	1.47	103 587	79.14	328.75	2.69
	43	6-2	112 272	67.81	24.15	2.69	112 272	67.81	204.87	2.87
	44	6-3	99 457	82.65	3 603.62	1.55	99 457	82.65	236.44	1.78
	45	6-4	97 396	81.87	3 601.67	2.33	97 396	81.87	176.32	2.08
均值			105 240	72.08	2 505.05	2.05	105 240	72.08	219.22	2.16

5 结论

1)分析了民转军运输机与原货机在载重平衡和装载军用装备上的区别,建立了两阶段分解的军用装备装载平衡模型,分别为二维几何约束模型和军用装备重量平衡模型,用于确定军用装备的装载位置及方向和合理分配装备的重量及重心。

2)选取了宽体民转军机型和实际的军用装备数据与随机生成的数据进行试验验证。仿真结果表明,两阶段分解模型可为军用装备确定装载位置,Benders 算法可有效提高模型求解速度,在满足重量重心约束要求下,提高了装载量和货舱的面积利用率。

3)当前所建模型仅适用于宽体机型,但与窄体机型相比,在载重平衡上,所考虑的目标和约束基本是一致的,均要求在考虑多种几何位置和飞机重量重心限制约束下,实现货舱面积利用率最大、重心偏差最小和装载量最大等目标。未来针对不同类型飞机的载重平衡问题根据实际运输条件作出适当调整即可。

4)精准装载军用装备的模型方法有利于保障飞机的安全运行,避免了因粗放的装载方案而导致的不安全事件,为装备运输单位提供了参考方法。

未来为适应不断变化的运输需求,军用装备装载平衡工作也需要做出适应性的调整 and 变化,如将现有的单机配载拓展到多机配载;单航段配载拓展到多航段配载等。此外为增加飞机运行的安全性,需要针对改装飞机进行适航认证评估改装结构安全性,确保飞机安全运行。

参考文献

[1] ZHAO X L, YUAN Y, DONG Y, et al. Optimization

Approach to the Aircraft Weight and Balance Problem with the Centre of Gravity Envelope Constraints[J]. IET Intelligent Transport Systems, 2021, 15 (10): 1269-1286.

[2] DESAI J, SRIVATHSAN S, LAI W Y, et al. An Optimization-Based Decision Support Tool for Air Cargo Loading[J]. Computers & Industrial Engineering, 2023, 175: 1-13.

[3] MESQUITA A C P, SANCHES C A A. Air Cargo Load and Route Planning in Pickup and Delivery Operations[J]. Expert Systems with Applications, 2024, 249: 123711.

[4] 赵向领, 李云飞. 客改货飞机载重平衡问题建模与 Benders 分解算法设计[J]. 交通运输工程学报, 2023, 23(2): 199-211.

ZHAO X L, LI Y F. Weight Balance Problem Modeling and Benders Decomposition Algorithm Design of Preighter[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2023, 23(2): 199-211. (in Chinese)

[5] ZHAO X L, DONG Y, ZUO L. A Combinatorial Optimization Approach for Air Cargo Palletization and Aircraft Loading [J]. Mathematics, 2023, 11 (13): 1-16.

[6] 赵向领, 左蕾. 货运飞机装箱与配载组合优化[J]. 航空动力学报, 2024, 39(11): 475-485.

ZHAO X L, ZUO L. Combination Optimization of Packing and Stowage of Cargo Aircraft[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39 (11): 475-485. (in Chinese)

[7] 赵向领, 李云飞, 王治宇, 等. 基于装卸顺序的中型机多航段协同配载优化[J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50(4): 1147-1161.

ZHAO X L, LI Y F, WANG Z Y, et al. Cooperating Loading Balance Optimization for Medium-Sized Aircraft with Multiple Flight Legs Based on Loading and Unloading Sequence [J]. Journal of Beijing

- University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50 (4): 1147-1161. (in Chinese)
- [8] LURKIN V, SCHYNS M. The Airline Container Loading Problem with Pickup and Delivery[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 244 (3): 955-965.
- [9] BRANDT F. The Air Cargo Load Planning Problem [D]. Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2017: 61-70.
- [10] YANG C G, LIU H, GAO Y. Load Planning of Transport Aircraft Based on Hybrid Genetic Algorithm [C]//EDP Sciences 2018 2nd International Conference on Mechanical, Material and Aerospace Engineering, MATEC Web of Conferences. France: EDP Sciences, 2018: 01007.
- [11] ROESENER A G, BARNES J W. An Advanced Tabu Search Approach to the Dynamic Airlift Loading Problem[J]. Logistics Research, 2016, 9 (1): 12.
- [12] KALUZYŃSKI B L, DAVID SHAW R H A. Optimal Aircraft Load Balancing [J]. International Transactions in Operational Research, 2009, 16 (6): 767-787.
- [13] NANCE R L, ROESENER A G, MOORE J T. An Advanced Tabu Search for Solving the Mixed Payload Airlift Loading Problem[J]. Journal of the Operational Research Society, 2011, 62 (2): 337-347.
- [14] 计佳璐, 王浩东, 姬生忠, 等. 考虑重心约束的飞翼车二维装载问题研究[J]. 系统工程理论与实践, 2024, 44 (10): 3451-3466.
- JI J L, WANG H D, JI S Z, et al. Two-Dimensional Loading Problem of the Flying-Wing-Vehicle Considering Centre of Gravity Constraints[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2024, 44 (10): 3451-3466. (in Chinese)
- [15] PAQUAY C, SCHYNS M, LIMBOURG S. Three Dimensional Bin Packing Problem Applied to Air Cargo [J]. Le Colloque International Sur Les, 2011 (3): 1-6.
- [16] PAQUAY C, SCHYNS M, LIMBOURG S. A Mixed Integer Programming Formulation for the Three-Dimensional Bin Packing Problem Deriving from an Air Cargo Application [J]. International Transactions in Operational Research, 2016, 23 (1/2): 187-213.
- [17] PAQUAY C, LIMBOURG S, SCHYNS M. A Tailored Two-Phase Constructive Heuristic for the Three-Dimensional Multiple Bin Size Bin Packing Problem with Transportation Constraints[J]. European Journal of Operational Research, 2018, 267 (1): 52-64.
- [18] PAQUAY C, LIMBOURG S, SCHYNS M, et al. MIP-Based Constructive Heuristics for the Three-Dimensional Bin Packing Problem with Transportation Constraints[J]. International Journal of Production Research, 2018, 56 (4): 1581-1592.
- [19] ROESENER A, HALL S. A Nonlinear Integer Programming Formulation for the Airlift Loading Problem with Insufficient Aircraft[J]. Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications, 2014, 5 (1): 125-141.
- [20] BRANDT F, NICKEL S. The Air Cargo Load Planning Problem: A Consolidated Problem Definition and Literature Review on Related Problems[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 275 (2): 399-410.
- [21] DELORME M, IORI M. Enhanced Pseudo-Polynomial Formulations for Bin Packing and Cutting Stock Problems[J]. INFORMS Journal on Computing, 2020, 32 (1): 101-119.
- [22] DELL'AMICO M, FURINI F, IORI M. A Branch-and-Price Algorithm for the Temporal Bin Packing Problem [J]. Computers & Operations Research, 2020, 114: 104825.
- [23] 文淦, 袁雷峰, 王旭东, 等. 基于改进 NSGA-II 算法的不规则集装箱装载优化[J]. 北京航空航天大学学报, 2025, 51 (3): 992-1004.
- WEN G, YUAN L F, WANG X D, et al. Loading Optimization of Irregular Unit Load Device Based on Improved NSGA-II Algorithm[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2025, 51 (3): 992-1004. (in Chinese)
- [24] 张长勇, 刘佳瑜. 基于混合遗传算法的多箱型集装箱装载问题分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2022, 48 (5): 747-755.
- ZHANG C Y, LIU J Y. Multi-Box Container Loading Problem Based on Hybrid Genetic Algorithm [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2022, 48 (5): 747-755. (in Chinese)
- [25] 张钧, 贺可太. 求解三维装箱问题的混合遗传模拟退火算法[J]. 计算机工程与应用, 2019, 55 (14): 32-39, 47.
- ZHANG J, HE K T. Study on Hybrid Genetic and Simulated Annealing Algorithm for Three-Dimensional Packing Problems[J]. Computer Engineering and Applications, 2019, 55 (14): 32-39, 47. (in Chinese)
- [26] 中央军委装备发展部. GJB 8849—2016 大型运输机军事装备运输装载要求[S]. 北京: 国家军用标准出版发行部, 2016.
- Equipment Development Department of the Central Military Commission. GJB 8849—2016 Military Equipment Transportation Loading Requirements for Large Transport Aircraft[S]. Beijing: National Military Standard Publishing and Distribution Department, 2016. (in Chinese)
- [27] CÔTÉ J F, DELL'AMICO M, IORI M. Combinatorial Benders' Cuts for the Strip Packing Problem [J]. Operations Research, 2014, 62 (3): 643-661.

(编辑: 陈斐)