

# 输入受限非线性系统的自适应零误差跟踪控制

郭雅琪, 史丽晨\*, 王海涛, 蒲林东

(西安建筑科技大学机械动力理论及应用研究所, 西安, 710055)

**摘要** 针对非线性系统面临的不确定动态、未知外部扰动和输入受限问题, 提出了一种考虑输入饱和的零误差跟踪控制器。首先将系统的未建模动态和外部扰动综合为有界的“总扰动项”, 进而设计控制律和自适应律补偿这一扰动项, 使跟踪误差渐进收敛至零而不仅仅收敛至有界的紧集内。相比于传统的考虑不确定动态和外部扰动的非线性控制方法, 所提控制方法的控制器结构更加简单, 跟踪精度更高。此外, 通过设计辅助误差补偿系统, 使得控制器能较好地应对输入饱和情形, 在饱和情形消失后, 补偿信号能够渐进收敛至零。最后, 通过仿真验证了所提方法的有效性。

**关键词** 输入限制; 自适应控制; 零误差跟踪控制; 反步控制

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2022.03.016

**中图分类号** TP273 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2022)03-0103-08

## An Adaptive Zero-Error Tracking Control for Nonlinear Systems with Input Constraints

GUO Yaqi, SHI Lichen, WANG Haitao, PU Lindong

(Institute of Mechanical Dynamics Theory and Application, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

**Abstract** Aimed at the problems that nonlinear systems are confronted with uncertain dynamics, unknown external disturbances and input constraints, an asymptotic tracking controller considering input saturation is proposed. Firstly, the uncertain dynamics and external disturbances in the system are integrated into the bounded "total disturbance term". Then, the control law and the adaptive law are designed to compensate the disturbance term to make the tracking error asymptotically converge to zero rather than just a bounded compact set. Compared with the traditional control method of nonlinear systems considering uncertain dynamics and external disturbance, the proposed controller is simpler in structure and the proposed method is good in precision. In addition, by designing an auxiliary error compensation system, the controller can cope with the input saturation situation well, and the compensation signal can converge to zero asymptotically after the saturation condition is removed. Finally, the proposed method is valid.

**Key words** input constraints; adaptive control; zero-error tracking control; back-stepping control

收稿日期: 2021-09-23

基金项目: 陕西省重点研发计划(2020GY-104)

作者简介: 郭雅琪(1997—), 女, 陕西商洛人, 硕士生, 研究方向为机电系统状态检测与控制。E-mail: gyq377@163.com

通信作者: 史丽晨(1972—), 女, 陕西西安人, 教授, 研究方向为机电系统状态监测与控制。E-mail: bestsic@xauat.edu.cn

**引用格式:** 郭雅琪, 史丽晨, 王海涛, 等: 输入受限非线性系统的自适应零误差跟踪控制[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2022, 23(3): 103-110. GUO Yaqi, SHI Lichen, WANG Haitao, et al. An Adaptive Zero-Error Tracking Control for Nonlinear Systems with Input Constraints[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2022, 23(3): 103-110.

近年来,不确定非线性系统的控制问题在电力系统<sup>[1]</sup>、无人机系统<sup>[2-3]</sup>受到广泛的关注。实际系统中常存在不确定性,控制不确定非线性系统的难点在于,不仅要考虑系统动力学模型的强耦合、非线性特点,而且要妥善处理系统不确定性。如果在控制器设计过程中不能妥善处理系统的不确定性,不仅系统性能会受到影响,严重时甚至会危及系统的运行安全。

为解决系统的不确定性问题,国内外学者提出了很多方法,包括鲁棒控制<sup>[4]</sup>、神经网络控制<sup>[5]</sup>、模糊控制<sup>[6]</sup>等。然而,上述文献采用的方法只能实现有界跟踪,即跟踪误差收敛到零附近的紧集内,紧集的大小依赖于控制器的设计参数。换句话说,这些控制器还不能实现对参考轨迹的零误差跟踪。在某些场景下,例如精密雕刻,需要转头的位置准确跟踪上期望信号,细微的偏差可能产出工艺次品。且系统运行过程中的电压并不能保证是恒定值,因此对不确定非线性系统的零误差跟踪控制具有十分重要的实际意义。自适应控制器能够根据控制对象本身参数或周围环境的变化,自动调整控制参数以获得满意的性能,且控制系统具有强鲁棒性。近年来有学者针对不确定性非线性系统设计了渐进跟踪控制器<sup>[7-10]</sup>,例如文献<sup>[8]</sup>研究了非严格反馈形式的多输入多输出非线性系统的自适应模糊渐进跟踪控制问题,在控制器设计过程中引入模糊逻辑系统,辨识出未知非线性函数,而后基于李雅普诺夫定理,推导出跟踪误差渐近收敛至零。文献<sup>[10]</sup>针对含不确定性的一类纯反馈系统,提出了一种反步自适应控制器,可使跟踪误差渐近收敛至零。然而,上述文献没有考虑或没有很好地解决执行器输入饱和问题。

执行器输入饱和是一个在工程实际中经常发生且亟待解决的问题。尤其在实现零误差跟踪时,需要很大的执行器的输入功率。当执行器物理限制生效时,控制指令无法被完全执行,系统的性能会受到影响,严重时甚至会导致系统失稳<sup>[11]</sup>。为此,文献<sup>[12~13]</sup>设计鲁棒控制器对期望控制律进行补偿,并通过李雅普诺夫分析保证了跟踪误差的有界性。然而,据作者们所知,考虑执行器饱和的不确定性非线性系统渐进跟踪问题并没有得到很好地解决。

本文利用反步自适应控制方法,为不确定非线性系统设计了一种考虑执行器饱和的零误差自适应跟踪控制器。相较于文献<sup>[8~10]</sup>,所提方法可以考虑执行器饱和带来的不利影响,即使出现执行器饱和和情形时,仍可以保证系统的稳定性。相较于文献<sup>[12~13]</sup>,所提方法可以使跟踪误差渐近收敛至零,并且从理论上证明了闭环系统的所有信号的有界性。

## 1 问题描述和预备知识

考虑以下具有未建模动态和输入饱和限制的不确定非线性严反馈系统<sup>[14]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{z} = q(\mathbf{x}, z) \\ \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) + \Delta_1(\mathbf{x}, z) \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_2) + \Delta_2(\mathbf{x}, z) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_{n-1}) + \Delta_{n-1}(\mathbf{x}, z) \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_n) + \Delta_n(\mathbf{x}, z) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i, i = 1, 2, \dots, n$ , ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ ) 是系统状态;  $y$  是系统输出;  $z \in \mathbf{R}^{n_0}$  是未建模动态;  $\Delta_i(x, z)$  是系统受到的扰动;  $f_i(x_i)$  是未知光滑非线性函数,  $q(\mathbf{x}, z)$  和  $\Delta_i(\mathbf{x}, z)$  是不确定函数,  $u$  是受饱和约束的控制输入,其模型可表示为:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{当 } u_c > u_{\max} \text{ 时} \\ u_c, & \text{当 } u_{\min} \leq u_c \leq u_{\max} \text{ 时} \\ u_{\min}, & \text{当 } u_c < u_{\min} \text{ 时} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $u_{\max}$  和  $u_{\min}$  分别为  $u$  的上下界;  $u_c$  为期望的控制指令。

**假设 1<sup>[10]</sup>**: 存在未知但有界的正函数  $f_{iM}(x_i)$ ,  $\Delta_{iM}(\mathbf{x}, z)$  使  $|f_i(x_i)| \leq f_{iM}(x_i)$ ,  $|\Delta_i(\mathbf{x}, z)| \leq \Delta_{iM}(\mathbf{x}, z)$ 。

**假设 2<sup>[10]</sup>**: 存在参考指令  $y_{\text{ref}}$  以及它的导数  $\dot{y}_{\text{ref}}$  连续且有界, 满足  $|y_{\text{ref}}| \leq y_1$ ,  $|\dot{y}_{\text{ref}}| \leq y_2$ 。

**注 1**: 在系统模型(1)中,我们将未建模动态和外界扰动综合为“总扰动项” $\Delta_i(x, z)$ ,设计自适应控制器对其进行补偿,这样的设计相比于含未建模动态系统的控制方法<sup>[15-16]</sup>而言,结构更加简单。假设 1 仅要求未知函数  $f_i(x_i)$ ,  $\Delta_i(x, z)$  的界是存在的,在控制器设计中不需要已知其值的大小,是对含不确定性的非线性系统进行控制器设计的基本要求。假设 2 是对参考指令的要求。

**引理 1<sup>[17]</sup>**: 对于任意正数  $\kappa$  和  $\epsilon$ , 下列不等式成立:

$$0 \leq |\kappa| - \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + \epsilon^2}} \leq \epsilon \quad (3)$$

**引理 2<sup>[18]</sup>**: (Barbalat 引理) 如果函数  $\mu(t)$  和它的导数  $\dot{\mu}(t)$  是有界的, 且有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu^2(s) ds < \infty$ , 那么:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0 \quad (4)$$

本文的控制目标是通过所提出的自适应跟踪控制器, 即使在系统存在不确定动态、外界扰动以及执行器饱和的情形下, 系统的输出  $y$  仍可以零误差地跟踪参考轨迹  $y_{\text{ref}}$ 。

## 2 自适应控制器设计

本节采用反步法设计自适应控制器, 控制器设计框图见图 1, 定义跟踪误差  $e_i = x_i - \alpha_{i-1}$ , ( $\alpha_0 = y_{\text{ref}}$ ), 通过设计虚拟控制器  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ 、实际控制器  $u$ 、自适应律以及辅助误差补偿系统实现控制目标。

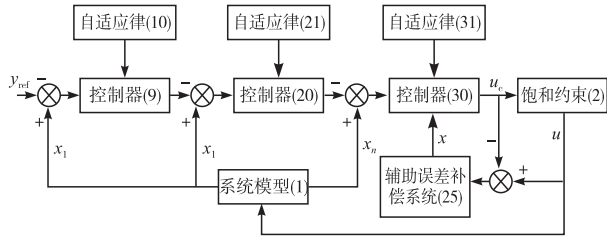


图 1 控制器设计框图

第 1 步, 由式(1)可得  $e_1$  的导数为:

$$\dot{e}_1 = x_2 + f_1(x_1) + \Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \dot{y}_{\text{ref}} \quad (5)$$

考虑如下 Lyapunov 函数候补  $L_1 = \frac{1}{2}e_1^2$ , 由式(5)可得  $L_1$  的导数为:

$$\dot{L}_1 = e_1(e_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) + \Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \dot{y}_{\text{ref}}) \quad (6)$$

由假设 1 可知  $|f_1(x_1)| \leq f_{1M}(x_1)$ ,  $|\Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \leq \Delta_{1M}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ,  $|\dot{y}_{\text{ref}}| \leq y_2$ , 可以得出:

$$|f_1(x_1) + \Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \dot{y}_{\text{ref}}| \leq |f_1(x_1)| + |\Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{z})| + |\dot{y}_{\text{ref}}| \leq f_{1M}(x_1) + \Delta_{1M}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + y_2 \leq \theta_1 \quad (7)$$

式中:  $\theta_1$  为  $f_1(x_1)$ 、 $\dot{y}_{\text{ref}}$  以及总扰动项  $\Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  的绝对值之和的上界, 是一个未知的有界正常数。在控制器设计时我们设计自适应律对这个值进行逼近, 以  $\hat{\theta}_1$  表示  $\theta_1$  的估计值并定义估计误差为  $\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ 。从而我们可以得出:

$$\dot{L}_1 \leq e_1 e_2 + e_1 \alpha_1 + |e_1| \theta_1 \quad (8)$$

构造虚拟控制器  $\alpha_1$  和自适应律为:

$$\alpha_1 = -k_1 e_1 - \frac{\hat{\theta}_1^2 e_1}{\sqrt{\hat{\theta}_1^2 e_1^2 + \sigma^2(t)}} \quad (9)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \rho_1 |e_1| - \rho_1 b_1 \sigma(t) \hat{\theta}_1 \quad (10)$$

式中:  $k_1$ 、 $b_1$  和  $\rho_1$  为正的设计参数;  $\sigma(t)$  为一致有界的正函数, 且满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(s) ds \leq \sigma_1 < +\infty$ ,  $|\dot{\sigma}(t)| \leq \sigma_2 < +\infty$

构造如下 Lyapunov 函数候补:

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2\rho_1}\bar{\theta}_1^2 \quad (11)$$

对  $\bar{L}_1$  求导, 并结合式(8)可得:

$$\dot{\bar{L}}_1 \leq e_1 e_2 + e_1 \alpha_1 + |e_1| \theta_1 - \frac{1}{\rho_1} \bar{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 \quad (12)$$

将式(9)和式(10)代入式(12)可得:

$$\dot{\bar{L}}_1 \leq e_1 e_2 - k_1 e_1^2 - \frac{\hat{\theta}_1^2 e_1^2}{\sqrt{\hat{\theta}_1^2 e_1^2 + \sigma^2(t)}} + \hat{\theta}_1 |e_1| + \sigma(t) \bar{\theta}_1 \hat{\theta}_1 \quad (13)$$

由杨氏不等式可得:

$$e_1 e_2 \leq \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (14)$$

$$\bar{\theta}_1 \hat{\theta}_1 = \bar{\theta}_1 (\theta_1 - \bar{\theta}_1) = \bar{\theta}_1 \theta_1 - \bar{\theta}_1^2 \leq \frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\bar{\theta}_1^2 \quad (15)$$

将式(14)和式(15)代入式(13)中可得:

$$\dot{\bar{L}}_1 \leq -\left(k_1 - \frac{1}{2}\right)e_1^2 - \frac{1}{2}b_1 \sigma(t) \bar{\theta}_1^2 + \left(1 + \frac{1}{2}b_1 \theta_1^2\right)\sigma(t) + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (16)$$

第  $i$  步 ( $i=2, 3, \dots, n-1$ ): 对  $e_i$  求导可得:

$$\dot{e}_i = x_{i+1} + f_i(\mathbf{x}_i) + \Delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (17)$$

考虑如下 Lyapunov 函数候补  $L_i = \frac{1}{2}e_i^2$ , 由式(17)可得  $L_i$  的导数为:

$$\dot{L}_i = e_i(e_{i+1} + \alpha_i + f_i(\mathbf{x}_i) + \Delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \dot{\alpha}_{i-1}) \quad (18)$$

由假设 1 可知  $|f_i(\mathbf{x}_i)| \leq f_{iM}(\mathbf{x}_i)$ ,  $|\Delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \leq \Delta_{iM}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , 可以得出:

$$|f_i(\mathbf{x}_i) + \Delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \dot{\alpha}_{i-1}| \leq |f_i(\mathbf{x}_i)| + |\Delta_i(\mathbf{x}, \mathbf{z})| + |\dot{\alpha}_{i-1}| \leq f_{iM}(\mathbf{x}_i) + \Delta_{iM}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \bar{\alpha}_{i-1} \leq \theta_i \quad (19)$$

式中:  $\theta_i$  为未知有界正常数, 以  $\hat{\theta}_i$  表示  $\theta_i$  的估计值并定义估计误差为  $\bar{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ ;  $\dot{\alpha}_{i-1}$  的有界性 ( $|\dot{\alpha}_{i-1}| \leq \bar{\alpha}_{i-1}$ ) 将在稳定性分析中证明。

构造虚拟控制器  $\alpha_i$  和自适应律为:

$$\alpha_i = -k_i e_i - \frac{\hat{\theta}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)}} \quad (20)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \rho_i |e_i| - \rho_i b_i \sigma(t) \hat{\theta}_i \quad (21)$$

式中:  $k_i$ 、 $b_i$  和  $\rho_i$  为正的设计参数。

构造如下 Lyapunov 函数候补:

$$\bar{L}_i = \frac{1}{2}e_i^2 + \frac{1}{2\rho_i}\bar{\theta}_i^2 \quad (22)$$

对  $\bar{L}_i$  求导, 并结合式(18)可得:

$$\dot{\bar{L}}_i \leq e_i e_{i+1} + e_i \alpha_i + |e_i| \theta_i - \frac{1}{\rho_i} \bar{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i \quad (23)$$

将式(20)和式(21)代入式(23),根据引理1和杨氏不等式可得:

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &\leq k_i e_i^2 - \frac{\hat{\theta}_i^2 e_i^2}{\sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)}} + e_i e_{i+1} + \hat{\theta}_i |e_i| + \\ b_i \sigma(t) \hat{\theta}_i \bar{\theta}_i &\leq -\left(k_i - \frac{1}{2}\right) e_i^2 + \frac{1}{2} e_{i+1}^2 + \hat{\theta}_i |e_i| - \\ &\frac{\hat{\theta}_i^2 e_i^2}{\sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)}} + b_i \sigma(t) \bar{\theta}_i (\theta_i - \bar{\theta}_i) \leq -\left(k_i - \frac{1}{2}\right) e_i^2 + \\ &\frac{1}{2} e_{i+1}^2 + \sigma(t) + b_i \sigma(t) \left(\frac{1}{2} \theta_i^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta}_i^2\right) \end{aligned} \quad (24)$$

第  $n$  步,考虑到  $u$  受到饱和约束,我们设计一种新型辅助误差补偿系统:

$$\dot{\chi} = -a \operatorname{sat}(\chi) + u - u_c \quad (25)$$

式中:  $\chi$  为速度补偿信号;  $a$  为正的设计参数。

饱和函数  $\operatorname{sat}(\chi)$  可表示为:

$$\operatorname{sat}(\chi) = \begin{cases} \bar{\chi}, & \text{if } \chi > \bar{\chi} \\ \chi, & \text{if } \underline{\chi} \leq \chi \leq \bar{\chi} \\ \underline{\chi}, & \text{if } \chi < \underline{\chi} \end{cases}$$

式中:  $\underline{\chi}$  和  $\bar{\chi}$  为设计参数,表示  $\chi$  的上下界。

定义新的误差变量:

$$\tilde{e}_n = e_n - \chi \quad (26)$$

对  $\tilde{e}_n$  求导可得:

$$\dot{\tilde{e}}_n = u + f_n(\underline{\mathbf{x}}_n) + \Delta_n(\mathbf{x}, z) - \dot{\alpha}_{n-1} - \dot{\chi} \quad (27)$$

考虑如下 Lyapunov 函数候选  $L_n = \frac{1}{2} n^2$ , 由式(27)可得  $L_n$  的导数为:

$$\dot{L}_n = \tilde{e}_n (u + f_n(\underline{\mathbf{x}}_n) + \Delta_n(\mathbf{x}, z) - \dot{\alpha}_{n-1} - \dot{\chi}) \quad (28)$$

由假设1可知  $|f_n(\underline{\mathbf{x}}_n)| \leq f_{nM}(\underline{\mathbf{x}}_n)$ ,  $|\Delta_n(\mathbf{x}, z)| \leq \Delta_{nM}(\mathbf{x}, z)$ , 可以得出:

$$\begin{aligned} |f_n(\underline{\mathbf{x}}_n) + \Delta_n(\mathbf{x}, z) - \dot{\alpha}_{n-1}| &\leq |f_n(\underline{\mathbf{x}}_n)| + \\ |\Delta_n(\mathbf{x}, z)| + |\dot{\alpha}_{n-1}| &\leq f_{nM}(\underline{\mathbf{x}}_n) + \Delta_{nM}(\mathbf{x}, z) + \bar{\alpha}_{n-1} \leq \theta_n \end{aligned} \quad (29)$$

式中:  $\theta_n$  为未知的正常数,以  $\hat{\theta}_n$  表示  $\theta_n$  的估计值并定义估计误差为  $\bar{\theta}_n = \theta_n - \hat{\theta}_n$ ;  $\dot{\alpha}_{n-1}$  的有界性 ( $|\dot{\alpha}_{n-1}| \leq \bar{\alpha}_{n-1}$ ) 将在稳定性分析中证明。

构造实际控制器  $u_c$  和自适应律为:

$$u_c = -k_n \tilde{e}_n - \frac{\hat{\theta}_n^2 \tilde{e}_n}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2 \tilde{e}_n^2 + \sigma^2(t)}} - a \operatorname{sat}(\chi) \quad (30)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \rho_n |\tilde{e}_n| - \rho_n b_n \sigma(t) \hat{\theta}_n \quad (31)$$

式中:  $k_n$ 、 $b_n$  和  $\rho_n$  为正的设计参数。

构造如下 Lyapunov 函数候选:

$$\bar{L}_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2\rho_n} n^2 \quad (32)$$

对  $\bar{L}_n$  求导,并结合式(28)可得:

$$\dot{\bar{L}}_n \leq \tilde{e}_n u + |\tilde{e}_n| \theta_n - \tilde{e}_n \dot{\chi} - \frac{1}{\rho_n} \dot{\hat{\theta}}_n \hat{\theta}_n \quad (33)$$

将式(25)、式(30)和式(31)代入式(33),可得:

$$\dot{\bar{L}}_n \leq -k_n \tilde{e}_n^2 - \frac{1}{2} b_n \sigma(t) n^2 + \left(1 + \frac{1}{2} b_n \theta_n^2\right) \sigma(t) \quad (34)$$

### 3 稳定性分析

**定理1:** 考虑非线性系统(1)~(2),在假设(1)~(2)成立的条件下,设计虚拟控制器(9)和(20),实际控制器(30),自适应律(10)、(21)和(31),以及辅助误差补偿系统(25),则系统的跟踪误差  $e_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $\tilde{e}_n$ , 自适应参数  $\hat{\theta}_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $u_c$ ,  $\alpha_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 和虚拟控制器的导数  $\dot{\alpha}_{i-1}$  是有界的,且跟踪误差能渐进收敛至零。

证明:考虑如下的 Lyapunov 函数候选:

$$L = \sum_{i=1}^n \bar{L}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{e}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \hat{\theta}_i^2 \quad (35)$$

式中:  $\tilde{e}_i = e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

对  $L$  求导,并代入式(16)、式(24)和式(34)可得:

$$\dot{L} = -\sum_{i=1}^n k'_i e_i^2 - \frac{1}{2} b_i \sigma(t) \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i^2 + \sigma(t) \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2} b_i \theta_i^2\right) \quad (36)$$

由式(35)和式(36)可得:

$$\dot{L} \leq -\omega L + \eta \quad (37)$$

式中:  $\omega = \min\{2k'_i, \rho_i b_i \sigma(t)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  是一个正数;  $\eta = \sigma(t) \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2} b_i \theta_i^2\right)$  是一个关于时间  $t$  的正函数。

对式(37)积分可得:

$$L(t) \leq (L(0) - \eta_0) e^{-\omega t} + \eta_0 \quad (38)$$

式中:  $\eta_0 = \eta/\omega$ 。

由式(38)可知,  $\tilde{e}_i$  和  $\hat{\theta}_i$  是有界的。由式(7)、(9)、(10)、(19)、(20)、(21)、(29)、(30)和(31)可得  $\alpha_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ )、 $u_c$  和  $\hat{\theta}_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 是有界的。下面证明跟踪误差  $\tilde{e}_i$  能渐进收敛至0,由式(36)可得:

$$L \leq -\sum_{i=1}^n k'_i e_i^2 + \sigma(t) \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2} \theta_i^2\right) \quad (39)$$

将式(39)左右两端按时间积分可得:

$$\begin{aligned} L(t) &\leq L(0) - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n k'_i e_i^2\right) dt + \\ &\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2} \theta_i^2\right) \int_0^t \sigma(t) dt \leq L(0) - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n k'_i e_i^2\right) dt + \\ &\sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{2} \theta_i^2\right) \sigma_1 \end{aligned} \quad (40)$$

由式(40)可得:

$$\int_0^t \left( \sum_{i=1}^n k_i' e_i^2 \right) dt \leq L(0) + \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{1}{2} \theta_i^2 \right) \sigma_1 \leq +\infty \quad (41)$$

根据引理2可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}_i = 0 \quad (42)$$

$\dot{\alpha}_{i-1}$  的有界性证明见附录。通过以上分析,定理1得证。

**注2:**在虚拟控制器(9)、(20)和实际控制器(30)中,  $\sigma(t)$  的使用对于零误差跟踪起着关键作用,其必须满足条件  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(s) ds \leq \sigma_1 < +\infty$ ,  $|\dot{\sigma}(t)| \leq \sigma_2 < +\infty$ , 才能保证  $\dot{\alpha}_{i-1}$  的有界性,使得反步控制器得以实现。

**注3:**本文设计的零误差跟踪控制器受文献[10]的启发,与之不同的是,所提控制器在自适应项(10)、(21)和(31)中,加入了  $-\rho_i b_i \sigma(t) \hat{\theta}_i$  项,可以保证零误差跟踪的实现以及自适应参数的有界性。如果不使用  $-\rho_i b_i \sigma(t) \hat{\theta}_i$  项,  $\hat{\theta}_i$  是一个单调增函数,其有界性无法得到保证。

**注4:**当系统的初始误差较大时,初始控制量随之变得很大,容易发生执行器饱和现象。对于文中的机电系统而言,其所需功率为  $P = U^2/R$ , 由于输入电压的限制,输入功率受到限制,控制输入出现饱和现象,从仿真部分图5中我们也可以观察到这一点。当系统运行一段时间后,跟踪误差逐渐减小,理论上我们可以利用所提的控制器实现渐进跟踪控制,即零误差跟踪控制。值得说明的是,由于物理系统的限制,我们通常利用  $\hat{\theta}_i^2 e_i / \sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)}$  中的正单调减函数  $\sigma(t)$ , 使跟踪误差逼近0。这时,由于跟踪误差很小,以及  $\sigma(t)$  的设计,其控制输入在饱和和限制范围内,此时物理系统输入的能量可以满足要求。

**注5:**受文献[11]的启发,本文设计了一种结构简单的新型辅助误差补偿系统(25)。由定理1,实际控制器(30)和  $|\text{sat}(\chi)| \leq \max \{ |\underline{\chi}|, |\bar{\chi}| \}$  可得,  $u_c$  是有界的,且存在一个正常数  $\bar{u}$  使得  $|u - u_c| \leq \bar{u}$ 。

**定理2:**考虑辅助误差补偿系统(25),通过合理的选择参数  $a$ , 可使系统的信号  $\chi$  能渐进收敛至零。

证明:考虑如下的 Lyapunov 函数候选:

$$L_\chi = \frac{1}{2} \chi^2 \quad (43)$$

由式(25)及  $|u - u_c| \leq \bar{u}$  可得式(43)导数为:

$$\begin{aligned} \dot{L}_\chi = & -a \chi \text{sat}(\chi) + (u - u_c) \chi \leq \\ & -a |\text{sat}(\chi)| |\chi| + \bar{u} |\chi| \end{aligned} \quad (44)$$

因此,我们可以选择参数  $a$  使得不等式  $a |\text{sat}(\chi)| > \bar{u}$  成立,从而使系统的信号  $\chi$  能渐进收敛至零。由此,定理2得证。

由定理1和定理2可知,  $\tilde{e}_n$  和  $\chi$  是有界的,由式(26)可得  $e_n$  是有界的,因此闭环系统的所有信号是有界的。

## 4 仿真验证

本节通过仿真验证本文所设计的控制器的有效性,以一个机电系统<sup>[19]</sup>为例,其动力学模型如下:

$$\begin{cases} M\ddot{q} + B\dot{q} + N\sin q = I \\ L\dot{I} = V_c - RI - K_B\dot{q} \end{cases} \quad (45)$$

式中:  $M = \frac{J}{K_\tau} + \frac{mL_0^2}{3K_\tau} + \frac{M_0L_0^2}{K_\tau} + \frac{2M_0R_0^2}{5K_\tau}$ ;  $N = \frac{mL_0G}{2K_\tau} + \frac{M_0L_0G}{K_\tau}$ ;  $B = \frac{B_0}{K_\tau}$ 。  $J$  为转动惯量;  $m$  为链环质量;  $M_0$  为负载质量;  $L_0$  为链环长度;  $R_0$  为载荷半径;  $G$  为重力系数;  $B_0$  为链接处黏滞摩擦系数;  $q$  为电机的角位置(以及负载的位置);  $I$  为电流;  $K_\tau$  为机电转换系数;  $L$  为电感;  $R$  为电阻;  $K_B$  为反电势系数;  $V_c$  为输入控制电压。机电系统的参数值如下:  $J = 1.625 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $m = 0.506 \text{ kg}$ ,  $R_0 = 0.023 \text{ m}$ ,  $M_0 = 0.434 \text{ kg}$ ,  $L_0 = 0.305 \text{ m}$ ,  $B_0 = 16.25 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$ ,  $L = 15 \text{ H}$ ,  $R = 5 \text{ } \Omega$ ,  $K_\tau = K_B = 0.9 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$ 。

引入状态变量  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ ,  $x_3 = I/M$  以及控制输入  $u = V_c/ML$ , 假设系统受到的未建模动态为  $\dot{z} = -2z + 0.25x_1^2$ , 总的扰动影响为  $\Delta_1 = \Delta_2 = z^2$ , 则该系统可表示为:

$$\begin{cases} \dot{z} = -2z + 0.25x_1^2 \\ \dot{x}_1 = x_2 + \Delta_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 - \frac{N}{M} \sin(x_1) - \frac{B}{M} x_2 + \Delta_2 \\ \dot{x}_3 = u - \frac{K_B}{ML} x_2 - \frac{R}{ML} x_3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (46)$$

受饱和限制的执行器模型为:

$$u = \begin{cases} 200, & \text{当 } u_c > 200 \text{ 时} \\ u_c, & \text{当 } -200 \leq u_c \leq 200 \text{ 时} \\ -200, & \text{当 } u_c < -200 \text{ 时} \end{cases} \quad (47)$$

为验证所提方法的有效性,将本文方法与文献[20]中提出的神经网络反步自适应方法进行比较。参考轨迹设置为  $y_{\text{ref}} = \sin(0.5t)$ , 所提控制器的参数设置为:  $k_1 = 10, k_2 = 7.2, k_3 = 15, a = 1, \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 6, \sigma(t) = \exp(-0.0001t), b_1 = b_2 = b_3$

$= 0.000\ 1, [\hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_2(0), \hat{\theta}_3(0)]^T = [0, 0, 0]^T$ 。系统初值为:  $\chi(0) = 0, [x_1(0), x_2(0), x_3(0), z]^T = [-0.5, 0.1, 0.1, 0.2]^T$ 。

采用文献[20]中提出的神经网络自适应跟踪控制方法所得的仿真如图 2 所示。如图所示,在设计控制器时没有考虑执行器饱和,控制输入迅速达到饱和,导致系统状态发散。这是由于系统存在初始误差,使得在开始运行时,执行器达到饱和,无法完全执行期望的控制信号。为对比所提控制器与文献[20]中的神经网络自适应控制器的跟踪误差收敛效果,在文献[20]控制器中加入式(25)、(26),以及式(30)最后一项的抗输入饱和设计,结果见图 3。

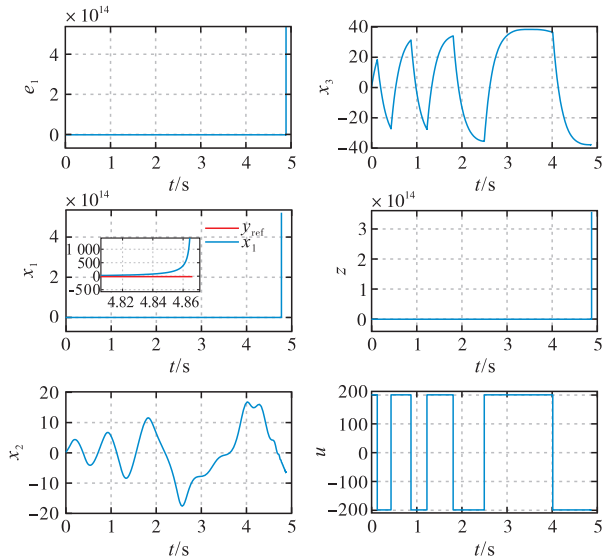


图 2 未考虑执行器饱和的仿真结果

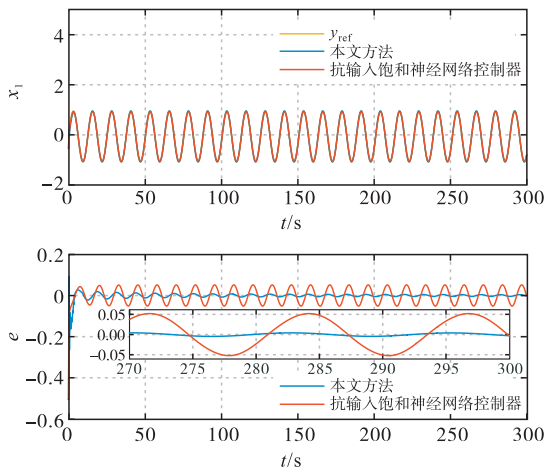


图 3 系统状态  $x_1$  及跟踪误差

图 4 显示两种方法都可保证系统的其他状态  $x_2, x_3$  正常变化。

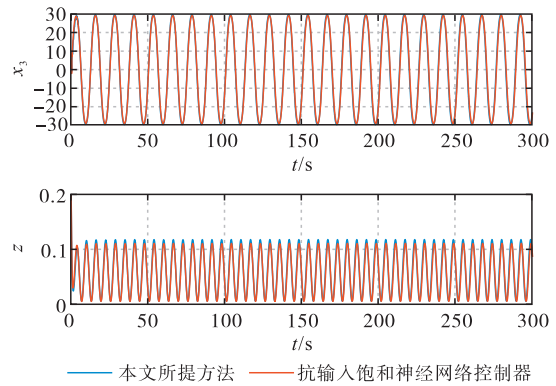
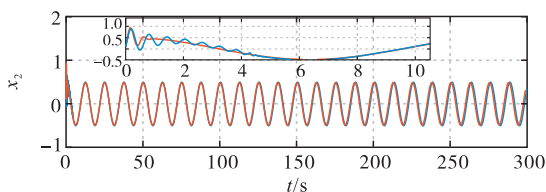


图 4 系统状态  $x_2, x_3$  及扰动  $z$

图 5 为控制输入和补偿信号变化曲线,当出现输入饱和时,本文控制器产生的误差补偿信号变化幅值更小。

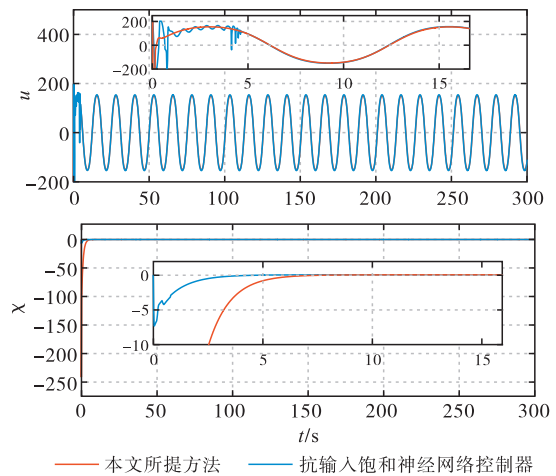


图 5 控制输入  $u$  及补偿信号  $\chi$

图 6 显示自适应参数值都是有界的。为了更加清晰地对比所提方法与文献[20]中的神经网络自适应控制器的控制效果,我们定义  $Q_e = \int_0^t |e(s)| ds, Q_u = \int_0^t |u(s)| ds$ , 所得的量化结果如表 1 所示。可见,本文所提控制器能显著地减少跟踪误差,提高跟踪精度,但得到这一性能是以略多的控制输入作为代价的。

表 1 跟踪误差和控制输入量化指标

量化指标	抗饱和和神经控制	本文方法
$Q_e$	9.808 9	1.962 8
$Q_u$	30 742.020 2	31 517.213 1

**注 6:**在本文中,我们在控制器中设计了鲁棒项  $-\frac{\hat{\theta}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)}}$  处理系统不确定性  $f_i(\underline{x}_i) + \Delta_i(\underline{x}, z) - \hat{\alpha}_{i-1}$ , 不仅可以实现渐进跟踪的目的,而且能够缓解误差在零点附近时控制量剧烈变化的问题。应该注意的是,如直接在控制器中加入鲁棒项  $|\hat{\theta}_i| \text{sgn}(e_i)$ , 即控制器为  $\alpha_i = -k_i e_i - |\hat{\theta}_i| \text{sgn}(e_i)$  (方案 1), 控制量会出现严重的抖振现象。克服这种抖振现象的一

种方法是设计一个光滑符号函数代替符号函数,一个例子为  $\alpha_i = -k_i e_i - |\hat{\theta}_i| \frac{\exp(e_i) - 1}{\exp(e_i) + 1}$  (方案2),这种处理方式虽然可以克服抖振现象,但却降低了跟踪精度。为此,我们使用  $-\frac{\hat{\theta}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)}}$  (方案3)处理系统的不确定性,并可以通过选择合适的正单调减函数  $\sigma(t)$  缓解抖振现象并实现渐进跟踪的目的。

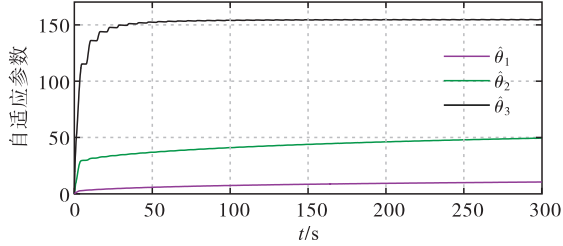


图6 自适应参数

图7为3种方案所得到的跟踪误差和控制量,可见本文提出的方法跟踪精度高且能有效缓解抖振现象。

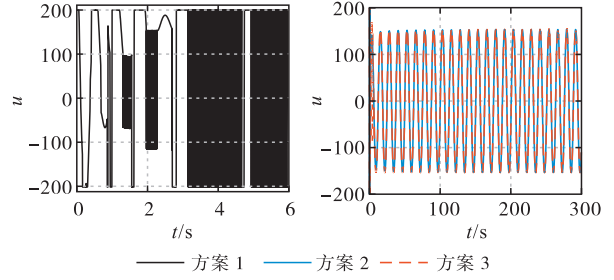
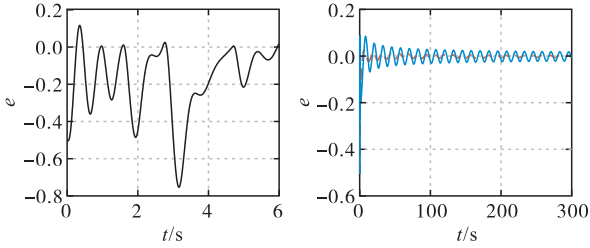


图7 3种方案下的跟踪误差和控制输入

## 5 结语

本文针对控制输入受限、未建模动态以及未知外界扰动影响下非线性系统的零误差跟踪控制问题,设计了一种考虑输入饱和的自适应零误差跟踪控制器。利用所提控制方法,不仅保证了闭环系统的稳定性,而且可以使跟踪误差渐进收敛至零。本文的自适应控制器中引入了抗饱和和辅助误差补偿系统,在出现输入饱和时能够使系统稳定。未来的研究工作将考虑执行器速率饱和的情形下,非线性系统的零误差跟踪控制问题。

附录:

$\dot{\alpha}_{i-1}$  的有界性证明:对式(20)求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i = & -k_i \dot{e}_i - \frac{(2\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i + \hat{\theta}_i^2 \dot{e}_i) \sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)} - \hat{\theta}_i^2 e_i (\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i^2 + \hat{\theta}_i^2 e_i \dot{e}_i + \sigma(t) \dot{\sigma}(t))}{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)} = -k_i \dot{e}_i - \\ & \frac{\dot{\theta}_i \hat{\theta}_i^3 e_i^3 + 2\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i \sigma^2(t) + \hat{\theta}_i^2 \dot{e}_i \sigma^2(t) - \hat{\theta}_i^2 e_i \sigma(t) \dot{\sigma}(t)}{(\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} = - \\ & \left( k_i + \frac{\hat{\theta}_i^2 \sigma^2(t)}{(\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right) \dot{e}_i - \frac{\dot{\theta}_i \hat{\theta}_i^3 e_i^3 + 2\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i \sigma^2(t) - \hat{\theta}_i^2 e_i \sigma(t) \dot{\sigma}(t)}{(\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (48)$$

根据式(17),我们可以将式(48)重写为:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i = & -k_i \dot{e}_i - \frac{(2\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i + \hat{\theta}_i^2 \dot{e}_i) \sqrt{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)} - \hat{\theta}_i^2 e_i (\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i^2 + \hat{\theta}_i^2 e_i \dot{e}_i + \sigma(t) \dot{\sigma}(t))}{\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t)} = -k_i \dot{e}_i - \\ & \frac{\dot{\theta}_i \hat{\theta}_i^3 e_i^3 + 2\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i \sigma^2(t) + \hat{\theta}_i^2 \dot{e}_i \sigma^2(t) - \hat{\theta}_i^2 e_i \sigma(t) \dot{\sigma}(t)}{(\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} = - \left( k_i + \frac{\hat{\theta}_i^2 \sigma^2(t)}{(\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \\ & (x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + \Delta_i(x, z) - \dot{\alpha}_{i-1}) - \frac{\dot{\theta}_i \hat{\theta}_i^3 e_i^3 + 2\hat{\theta}_i \dot{\theta}_i e_i \sigma^2(t) - \hat{\theta}_i^2 e_i \sigma(t) \dot{\sigma}(t)}{(\hat{\theta}_i^2 e_i^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (49)$$

当  $i = 1$  时,  $\dot{\alpha}_{i-1} = \dot{\alpha}_0 = \dot{y}_{ref}$ 。由稳定性分析和式(38)可知:  $\hat{\theta}_1$ 、 $e_1$ 、 $x_2$  有界,根据式(10)可知  $\dot{\theta}_1$  有界。又由  $\sigma(t) > 0$  可得  $(\hat{\theta}_1^2 e_1^2 + \sigma^2(t))^{\frac{3}{2}} > 0$ , 结合假设1和假设2我们可以得出  $\dot{\alpha}_1$  有界。

相似地,我们可以推导出  $\alpha_i$ , ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) 有界。



## 参考文献

- [1] 朱林,徐敏,陈裔生,等.一种改善电力系统暂态性能的轨迹跟踪控制策略[J].电力系统自动化,2012,36(14):1-5,22.
- [2] 吴贤宁,李哲,梁晓龙,等.基于模糊控制的无人机集群视觉着降[J].空军工程大学学报(自然科学版),2021,22(4):2-8.
- [3] 王焯,解武杰,张建业,等.基于 Backstepping-L1 自适应控制的旋翼飞行器容错控制[J].空军工程大学学报(自然科学版),2017,18(6):8-13.
- [4] PERRUSQUÍA A, YU W. Robust Control Under Worst-Case Uncertainty for Unknown Nonlinear Systems Using Modified Reinforcement Learning[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020,30(7):2920-2936.
- [5] HWA B, YZ A, PXL C, et al. Neural-Network-Based Tracking Control for a Class of Time-Delay Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics[J]. Neurocomputing, 2020,396:179-190.
- [6] WANG M, WANG Z D, CHEN Y, et al. Observer-Based Fuzzy Output-Feedback Control for Discrete-Time Strict-Feedback Nonlinear Systems with Stochastic Noises [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020,50(8):3766-3777.
- [7] XIAN B, DAWSON D M, DE QUEIROZ M S, et al. A Continuous Asymptotic Tracking Control Strategy for Uncertain Nonlinear Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004,49(7):1206-1211.
- [8] DU P, PAN Y, CHADLI M, et al. Asymptotic Tracking Control for Constrained Nonstrict-Feedback MIMO Nonlinear Systems Via Parameter Compensations[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020,30(8):3365-3381.
- [9] WANG C X, WU Y Q, ZHAO Y, et al. Asymptotic Tracking Control for Time-Delay Nonlinear Systems with Parametric Uncertainties and Full State Constraints[J]. ISA Transactions, 2020,98:101-109.
- [10] WEI J L, LIU Z C. Asymptotic Tracking Control for a Class of Pure-Feedback Nonlinear Systems[J]. IEEE Access, 2019,7:166721-166728.
- [11] BU X W, WU X Y, MA Z, et al. Novel Auxiliary Error Compensation Design for the Adaptive Neural Control of a Constrained Flexible Air-Breathing Hypersonic Vehicle[J]. Neurocomputing, 2016,171:313-324.
- [12] MIN H F, DUAN N, XU S Y, et al. Barrier Lyapunov Function-Based Tracking Control for Stochastic Nonlinear Systems with Full-State Constraints and Input Saturation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020,357(17):12414-12432.
- [13] YANG X, ZHAO B. Optimal Neuro-Control Strategy for Nonlinear Systems with Asymmetric Input Constraints[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020,7(2):575-583.
- [14] LI Y M, TONG S C, LIU Y J, et al. Adaptive Fuzzy Robust Output Feedback Control of Nonlinear Systems with Unknown Dead Zones Based on a Small-Gain Approach [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014,22(1):164-176.
- [15] 张天平,陈佳胜,夏晓南.具有输入及状态未建模动态系统的输出反馈自适应控制[J].控制与决策,2015,30(10):1847-1853.
- [16] 张天平,葛继伟,夏晓南.具有输入未建模动态的纯反馈非线性系统自适应控制[J].控制理论与应用,2017,34(12):1637-1647.
- [17] ZUO Z Y, WANG C L. Adaptive Trajectory Tracking Control of Output Constrained Multi-Rotors Systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2014,8(13):163-1174.
- [18] LIU Y H. Dynamic Surface Asymptotic Tracking of a Class of Uncertain Nonlinear Hysteretic Systems Using Adaptive Filters[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018,355(1):123-140.
- [19] YU J P, SHI P, DONG W J, et al. Observer and Command-Filter-Based Adaptive Fuzzy Output Feedback Control of Uncertain Nonlinear Systems [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015,62(9):5962-5970.
- [20] WANG S X, XIA J W, WANG X L, et al. Adaptive Neural Networks Control for MIMO Nonlinear Systems with Unmeasured States and Unmodeled Dynamics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021,408:126369.

(编辑:姚树峰)