低维四元局部修复码的构造

展秀珍[1]，李瑞虎[1]，付　强[1]，李沪生[1]，吕京杰[1]
(空军工程大学基础部，西安，710051)

摘要　在分布式存储系统中，当节点发生故障时，局部修复码能够提高修复效率。四元距离最优码易于实现，当给定码长和维数时，四元距离最优码的纠错能力优于二元距离最优码，但目前利用四元距离最优码构造四元局部修复码的研究存在很多空白。设四元距离最优码的维数 $2\leqslant k\leqslant 4$，由给定维数的四元 Simplex 码与 MacDonald 码以及少量距离最优码的生成矩阵，利用扩展、删除与并置等组合方法，设法构造出任意码长 $n\geqslant k+1$ 且局部度较小的四元局部修复码。确定出达到 Singleton-Like 界或 Cadambe-Mazumdar 界的四元局部修复码。证明除 55 个四元局部修复码外，其余的四元局部修复码都是局部度最优的。

关键词　四元距离最优码；局部修复码；生成矩阵
DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2021.03.016
中图分类号　O157.4　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2021)03-0104-07

Construction of Quaternary Locally Repairable Code with Low Dimension

ZHAN Xiuzhen[1], LI Ruihu[1], FU Qiang[1], LI Husheng[1], LYU Jingjie[1]
(Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract　In the distributed storage system, locally repairable code can improve repair efficiency when a node is at fault. Quaternary distance optimal codes are easy to realize and their error-correcting ability is superior to that of the binary distance optimal codes when code length and dimension are given. However, there are lots of work needed to construct quaternary locally repairable codes by quaternary distance optimal codes. When the dimensions of quaternary distance optimal codes are $2\leqslant k\leqslant 4$, by combination with the operation of combination, such as extension, the deletion and the juxtaposition, the paper can obtain generator matrices of quaternary Simplex code, MacDonald code and few distance optimal linear codes to construct quaternary locally repairable codes with code length $n\geqslant k+1$ and small locality, and can verify quaternary locally repairable codes to attain Singleton-Like bound or Cadambe-Mazumdar bound and prove that except for 55 quaternary locally repairable codes, other quaternary locally repairable codes are all locality optimal.

Key words　quaternary distance optimal code; locally repairable code; generator matrix

在分布式存储系统中，为了实现数据的可靠存　　储与恢复，三重备份是简单易行的方案[1]。由于三

收稿日期：2021-01-13
基金项目：国家自然科学基金(11901579，11801564)；空军工程大学基础部研究生创新基金
作者简介：展秀珍(1995—)，女，河南驻马店人，硕士生，研究方向：大数据存储与编码。E-mail：15514292026@163.com
通信作者：李瑞虎(1966—)，男，安徽亳州人，教授，博士生导师，研究方向：群论、图论、编码理论和密码学。E-mail：llzsy110@163.com

引用格式：*展秀珍，李瑞虎，付强，等. 低维四元局部修复码的构造[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2021，22(3)：104-110. ZHAN Xiuzhen, LI Ruihu, FU Qiang, et al. Construction of Quaternary Locally Repairable Code with Low Dimension[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2021, 22(3): 104-110.*

重备份的存储效率低且存储代价过大，因此人们提出了存储负荷更低的纠删码方案[2-3]。局部修复码是一种新型纠删码，其码字的任一符号位发生故障时，都可通过访问其他固定数目的符号位恢复信息。2012 年，Gopalan 等人提出局部修复码(Locally Repairable Code，LRC)的概念[4]：若 $\boldsymbol{C}=[n,k,d]_q$ 是码长为 n，维数为 k，最小距离为 d 的 q 元线性码，码字 $c=(c_1,\cdots,c_n)\in\boldsymbol{C}$ 的第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 位 c_i 都能通过其他至多 r 位恢复，则称 $\boldsymbol{C}$ 是局部度为 r 的局部修复码，并记为 $\boldsymbol{C}=[n,k,d;r]_q$。文献[4]还给出 Singleton-Like(S-L)界：

$$d\leqslant n-k+2-\lceil k/r\rceil \tag{1}$$

当等式成立时，称码达到了 S-L 界。特别地，当 $k=r$ 时，S-L 界退化为经典的 Singleton 界。为了更加精确地描述 LRC 4 个参数之间的限制关系，2013 年 Cadambe 和 Mazumdar 提出一个考虑域的大小 q 的界，即 Cadambe-Mazumdar(C-M)界[5]：

$$k\leqslant\min_{t\in Z^+}\{\mathrm{tr}+k_{opt}^q(n-t(r+1),d)\} \tag{2}$$

式中：$k_{opt}^q(n,d)$是码长为 n，最小距离为 d 的 q 元码的最大维数。当等式成立时，称码达到 C-M 界。

若 $\boldsymbol{C}=[n,k,d;r]_q$ 达到 S-L 界或 C-M 界，或者不存在参数为$[n,k,d;r-1]_q$ 的局部修复码，则称 $\boldsymbol{C}$ 是局部度最优的(r—最优的)。

在工程应用中，小域上 LRC 编码和解码复杂度低，从而更具有实用性[6]。Gopalan 等人提出 LRC 的概念之后，人们构造了在小域上达到 S-L 界[7-10]或 C-M 界[11-12]的 LRC。在四元域上，人们得到一些局部度最优 LRC 的结果：文献[13]构造了四元 LRC $[4i+3,3i+1,3;3]_4$ 和$[4i+4,3i+2,3;3]_4$($i\geqslant1$)。与文献[13]相比，Ernvall 等人还构造了参数为$[4i+4,3i+1,3;4]_4$($i\geqslant1$)的四元 LRC，这三类 LRC 是局部度最优或拟最优的[14]。Barg 等人利用代数曲线和代数曲面构造了参数为$[n,k,d;r]_q=[18,11,3;2]_4$ 的 LRC[15]。Fu 等利用缩短 q 元汉明码与$(q^2+1)-$cap 构造了 $d=3,4$ 的四元 LRC [10]，其参数为$[17-s,13-s,4;11-s]_4$($0\leqslant s\leqslant5$)，$[12-j,8-j,4;6-3i-t]_4$($j=4i+t,0\leqslant t\leqslant3,0\leqslant i\leqslant1$)，$[21-s,18-s,3;15-s]_4$($1\leqslant s\leqslant9$)和$[12-j,9-j,3;6-2i-t]_4$($1\leqslant j=3i+t\leqslant4,0\leqslant t,i\leqslant2$)。文献[16]利用有限域上的自同构群构造一般域上的 LRC，可得到参数为 $[2,1,2;1]_4$，$[4,1,4;1]_4$，$[4,2,2;1]_4$，$[4,3,2;3]_4$，$[3,2,2;2]_4$和$[5,4,2;4]_4$ 的四元 LRC。

四元域是二元域的二次扩域，四元码能够转化为二元码。当给定码的码长和维数时，四元码的最小距离往往比二元码的最小距离大，即四元码的检错和纠错能力更好，四元距离最优 LRC 有较好的应用价值。由 Grassl 的码表[17]和文献[18～20]可得到距离最优四元码，但给定码长和维数时，四元距离最优码往往有很多，它们的局部度也有差别[19]，基于此我们构造局部度较小的四元 LRC。设码的维数 $2\leqslant k\leqslant4$，由给定维数的四元 Simplex 码、MacDonald 码以及少量距离最优码的生成矩阵，利用扩展、删除与并置等组合方法，我们设法构造出任意码长 $n\geqslant k+1$ 且局部度尽可能小的 LRC，并利用 S-L 界及 C-M 界判断其局部度的最优性。

1　预备知识

令 $\boldsymbol{F}_4=\{0,1,w,w^2\}$为四元域，其中 $w^2=w+1,w^3=1$。记 $w=2,w^2=3$，则 $\boldsymbol{F}_4=\{0,1,2,3\}$。$\boldsymbol{F}_4^n$ 为 $\boldsymbol{F}_4$ 上的 n 维向量空间，称 $\boldsymbol{F}_4^n$ 的 k 维子空间 $\boldsymbol{C}$ 为四元线性码，并记为 $\boldsymbol{C}=[n,k]_4$，n 称为 $\boldsymbol{C}$ 的码长，$\boldsymbol{C}$ 中的向量称为码字。称由 $\boldsymbol{C}$ 的一组基构成的 $k\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{G}_{k,n}$为 $\boldsymbol{C}$ 的生成矩阵。若一个非零向量的第一个非零分量是 1，则称其为首一向量。

若 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{F}_4^n,\boldsymbol{x}$ 的汉明重量为 $wt(\boldsymbol{x})=|\{i\,|\,1\leqslant i\leqslant n,x_i\neq0\}|$。$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的汉明距离为 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=wt(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$。当 $\boldsymbol{C}$ 中非零码字的最小汉明重量为 d 时，记 $\boldsymbol{C}=[n,k,d]_4$。设 $\boldsymbol{C}=[n,k,d]_4$，若不存在参数为$[n,k,d+1]_4$ 的四元线性码，则称 $\boldsymbol{C}=[n,k,d]_4$ 为四元距离最优码。

记长度为 n 的全 $\boldsymbol{i}(i=0,1,2,3)$行向量为 $\boldsymbol{i}_n=(i,\cdots,i)$，记 $\boldsymbol{i}_n^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{i}_n$ 的转置。当 $a,b\in Z^+$ 且 $a<b$ 时，记$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$，$[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b\}$。令 $\boldsymbol{I}_k=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$为 k 阶单位矩阵。记矩阵 $\boldsymbol{G}_{k,n}$ 中的一个列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{G}_{k,n}$。记 l 个矩阵 $\boldsymbol{G}_{k,m}$的并置为 $\boldsymbol{G}_{k,lm}=(\boldsymbol{G}_{k,m},\cdots,\boldsymbol{G}_{k,m})=(l\,\boldsymbol{G}_{k,m})$。

线性码的局部度可以由生成阵确定，具体如下：

引理 1[4]　设线性码 $\boldsymbol{C}=[n,k,d]_q$ 的生成阵为 $\boldsymbol{G}_{k,n}=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$\boldsymbol{g}_i(1\leqslant i\leqslant n)$是 k 维列向量。对任意 $i\in[n]$，若存在集合 $A_i\subseteq[n]\backslash\{i\}$使得 $\boldsymbol{g}_i$ 被至多 r 个 $g_j(j\in A_i)$线性表出，则 $\boldsymbol{C}$ 的局部度为 r。

线性码的参数 n,k,d 相互制约，下面介绍一种重要的码界——Griesmer 界。

引理 2[19]　(Griesmer 界)任何 q 元线性码 $\boldsymbol{C}=[n,k,d]_q$ 的码长 n、维数 k 和最小距离 d 之间都满足 $n\geqslant g=g_q(k,d)=\sum_{i=0}^{k-1}\lceil d/q^i\rceil$。当等号成立时，称线性码达到 Griesmer 界。

在四元域上，记 $\boldsymbol{S}_k$ 为 k 维 Simplex 码的生成矩阵，$\boldsymbol{M}_k$ 为 k 维 MacDonald 码的生成矩阵。设 $k\in$

Z^+,$k\geqslant 2$,则 k 维首一列向量的个数(即 $\boldsymbol{S}_k$ 的列数)为 $n_k=(4^k-1)/3$,显然 $n_k=4n_{k-1}+1$。下面介绍 $\boldsymbol{S}_k$ 与 $\boldsymbol{M}_k$ 的递归构造。

$$\boldsymbol{S}_2=\begin{pmatrix}10111\\01123\end{pmatrix},\boldsymbol{S}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{0}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_2\\ \boldsymbol{0}_5 & 1 & \boldsymbol{1}_5 & \boldsymbol{2}_5 & \boldsymbol{3}_5\end{bmatrix},\cdots,$$

$$\boldsymbol{S}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{0}_{k-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{S}_{k-1}\\ \boldsymbol{0}_{n_{k-1}} & 1 & \boldsymbol{1}_{n_{k-1}} & \boldsymbol{2}_{n_{k-1}} & \boldsymbol{3}_{n_{k-1}}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}0111\\1123\end{pmatrix},\boldsymbol{M}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_2\\ 1 & \boldsymbol{1}_5 & \boldsymbol{2}_5 & \boldsymbol{3}_5\end{bmatrix},\cdots,$$

$$\boldsymbol{M}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{k-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{S}_{k-1}\\ 1 & \boldsymbol{1}_{n_{k-1}} & \boldsymbol{2}_{n_{k-1}} & \boldsymbol{3}_{n_{k-1}}\end{bmatrix}。$$

显然,$\boldsymbol{S}_k$ 生成参数为$[(4^k-1)/3,k,4^{k-1};2]_4$ 的距离最优 LRC,$\boldsymbol{M}_k$ 生成距离最优 LRC $[4^{k-1},k,3\cdot 4^{k-2};2]_4$。

2 低维四元 LRC 的构造

由文献[20]可知,对于四元线性码$[n,k,d]_4$,当 $k=2$ 且给定最小距离 d 时,存在达到 Griesmer 界的$[n,2,d]_4$ 码。当 $k=3$ 且 $d=7,8$ 时,有 $n=g+1$;对于其他的 d 存在达到 Griesmer 界的$[n,3,d]_4$ 码。$k=4$ 时,若 $d\in\{3,4,7,8\}\cup[13,16]\cup[23,32]\cup[37,44]\cup[77,80]$,则 $n=g+1$;对于其他的 d 存在达到 Griesmer 界的$[n,4,d]_4$ 码。因此本节分 3 小节讨论四元距离最优 LRC $[n,k,d;r]_4$($2\leqslant k\leqslant 4$)的构造。

约定:四元距离最优码$[n,k,d]_4$ 简记为$[n,k,d]$,四元距离最优 LRC $[n,k,d;r]_4$ 简记为$[n,k,d;r]$。

2.1 $[n,2,d;r]$距离最优 LRC 的构造

根据**引理 1**,构造二维四元距离最优码的生成矩阵,并分析其列向量间的线性关系确定其局部度,其中生成矩阵中的列向量均为首一向量。

引理 3 存在如下参数$[n,2,d;r]$的距离最优 LRC:

1)当 $3\leqslant n\leqslant 9$ 时,存在$[n,2,d;2]$距离最优 LRC;特别地,若 $n=6,8$,还存在$[n,2,d;1]$距离最优 LRC;

2)当 $n=5l+i$,$l\geqslant 2$,$0\leqslant i\leqslant 4$ 时,存在$[n,2,d;1]$距离最优 LRC。

证明:

1)令 $\boldsymbol{G}_{2,5}=\begin{pmatrix}10111\\01123\end{pmatrix}=(g_1,g_2,\cdots,g_5)$,$\boldsymbol{G}_{2,i}=(g_1,g_2,\cdots,g_i)$($3\leqslant i\leqslant 5$),由 $\boldsymbol{G}_{2,i}$ 可得$[3,2,2;2]$,$[4,2,3;2]$和$[5,2,4;2]$码。令 $\boldsymbol{G}_{2,6}=(\boldsymbol{G}_{2,5}\mid\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{G}_{2,5}$可得$[6,2,4;2]$码。当 $2\leqslant j\leqslant 4$ 时,令 $\boldsymbol{G}_{2,5+j}=(\boldsymbol{G}_{2,5}\mid\boldsymbol{G}_{2,j})$,由 $\boldsymbol{G}_{2,5+j}$ 可得$[5+j,2,d;2]$距离最优 LRC。特别地,由 $\boldsymbol{A}_{2,2i}=(\boldsymbol{G}_{2,i}\mid\boldsymbol{G}_{2,i})$($3\leqslant i\leqslant 5$)可得$[2i,2,2d;1]$距离最优 LRC。

2)当 $n=5l$,$l\geqslant 2$ 时,令 $\boldsymbol{G}_{2,5l}=(l\,\boldsymbol{G}_{2,5})$,$\boldsymbol{G}_{2,5l}$生成$[5l,2,4l;1]$码。当 $n=5l+i\geqslant 11$,$1\leqslant i\leqslant 4$ 且 $l\geqslant 2$ 时,由 $\boldsymbol{G}_{2,5l+i}=(\boldsymbol{G}_{2,5(l-1)}\mid\boldsymbol{G}_{2,5+i})$ 可得$[5l+i,2,4l+i-1;1]$码。

综上可知**引理 3** 成立。

以上构造得到所有$[n,2,d]$距离最优码,其中$[3,2,2;2]$,$[4,2,3;2]$,$[5,2,4;2]$,$[6,2,4;1]$,$[8,2,6;1]$,$[10,2,8;1]$码达到 S-L 界;$[7,2,5;2]$和$[9,2,7;2]$码达不到 S-L 界或 C-M 界,但不难验证$[7,2,5;1]$和$[9,2,7;1]$不存在,故这两个 LRC 仍是 r—最优的;其余 LRC 的局部度为 $r=1$,已达到局部度最优。

2.2 $[n,3,d;r]$距离最优 LRC 的构造

与 2.1 节类似,构造三维四元距离最优码的生成矩阵,并分析其列向量间的线性关系确定局部度。

引理 4 存在如下参数$[n,3,d;r]$的距离最优 LRC。

1)当 $4\leqslant n\leqslant 6$ 时,存在$[n,3,d;3]$距离最优 LRC;当 $7\leqslant n\leqslant 41(n\neq 32,33)$及 $n=52,53$ 时,存在$[n,3,d;2]$距离最优 LRC;特别地,当 $n=10,12,28,30,32,33,38,40$ 时,还存在$[n,3,d;1]$距离最优 LRC;

2)当 $n\geqslant 42(n\neq 52,53)$时,存在$[n,3,d;1]$距离最优 LRC。

证明:

1)构造如下 4 个生成矩阵。

$$\boldsymbol{G}_{3,4}=\begin{pmatrix}1001\\0101\\0011\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_{3,9}=\left(\begin{array}{c|c}&111111\\ I_3 & 031223\\ &203131\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{3,16}=\left(\begin{array}{c|c}&0011111111111\\ I_3 & 1100231112233\\ &1212001231323\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{3,21}=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}100&011&011&011&111111111\\ 010&101&102&103&111222333\\ 001&110&220&330&123123123\end{array}\right)=$$

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{21})$。

以上 4 个矩阵生成$[4,3,2;3]$,$[9,3,6;2]$,$[16,3,12;2]$和$[21,3,16;2]$码。令 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$,作 $\boldsymbol{G}_{3,5}=(\boldsymbol{G}_{3,4}\mid\boldsymbol{\alpha})$,$\boldsymbol{G}_{3,6}=(\boldsymbol{G}_{3,5}\mid\beta)$,由 $\boldsymbol{G}_{3,5}$和 $\boldsymbol{G}_{3,6}$得$[5,3,3;3]$,$[6,3,4;3]$码。由 $\boldsymbol{G}_{3,9}$的子矩阵 $\boldsymbol{G}_{3,i}=(g_1,g_2,\cdots,g_i)$($7\leqslant i\leqslant 8$)可得$[7,3,4;2]$和$[8,3,5;2]$码。由 $\boldsymbol{G}_{3,10}=(\boldsymbol{G}_{3,9}\mid\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{G}_{3,9}$可得

$[10,3,6;2]$码。当 $1\leqslant j\leqslant 5$ 时，删除 $\boldsymbol{G}_{3,16}$ 的后 j 列得到 $\boldsymbol{G}_{3,16-j}$，$\boldsymbol{G}_{3,16-j}$ 生成 $[16-j,3,12-j;2]$ 码。当 $1\leqslant j\leqslant 4$ 时，删除 $\boldsymbol{G}_{3,21}$ 的后 j 列得到 $\boldsymbol{G}_{3,21-j}$，由 $\boldsymbol{G}_{3,21-j}$ 可得 $[21-j,3,16-j;2]$LRC。

当 $22\leqslant n\leqslant 24$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{S}_3\mid e_1,\cdots,e_{n-21})$ 得到 $[n,3,d;2]$ 距离最优 LRC；当 $25\leqslant n\leqslant 30$，$33\leqslant n\leqslant 41$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{S}_3\mid \boldsymbol{G}_{3,n-21})$，$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成 $[n,3,d;2]$ 距离最优 LRC；$n=31$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{3,31}=(\boldsymbol{M}_3\mid \boldsymbol{G}_{3,15})$，$\boldsymbol{G}_{3,31}$ 生成 $[31,3,23;2]$码。

特别地，当 $i\in[5,6]\cup[14,16]\cup[19,21]$ 时，令 $\boldsymbol{A}_{3,2i}=(\boldsymbol{G}_{3,i}\mid \boldsymbol{G}_{3,i})$，$\boldsymbol{A}_{3,2i}$ 生成 $[2i,3,2d;1]$ 距离最优 LRC。由 $\boldsymbol{G}_{3,33}=(\boldsymbol{A}_{3,32}\mid \boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{A}_{3,32}$ 可得 $[33,2,24;1]$LRC。

2）当 $43\leqslant n\leqslant 63$ 且 $n\neq 52,53$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{3,n}=(\boldsymbol{S}_3\mid \boldsymbol{G}_{3,n-21})$，$\boldsymbol{G}_{3,n}$ 生成 $[n,3,d;1]$ 距离最优 LRC。构造 $\boldsymbol{G}_{3,52}=(\boldsymbol{S}_3\mid \boldsymbol{G}_{3,31})$，$\boldsymbol{G}_{3,53}=(\boldsymbol{S}_3\mid \boldsymbol{A}_{3,32})$ 分别生成 $[52,3,39;2]$ 和 $[53,3,40;2]$LRC。

当 $n=21l$，$l\geqslant 3$ 时，令 $\boldsymbol{G}_{3,21l}=(l\,\boldsymbol{G}_{3,21})$，$\boldsymbol{G}_{3,21l}$ 生成 $[21l,3,16l;1]$ 码。当 $n=21l+i$，$1\leqslant i\leqslant 20$ 且 $l\geqslant 3$ 时，令 $\boldsymbol{G}_{3,21l+i}=(\boldsymbol{G}_{3,21(l-1)}\mid \boldsymbol{G}_{3,21+i})$，$\boldsymbol{G}_{3,21l+i}$ 生成 $r=1$ 的 $[21l+i,3,d]$ 距离最优码。

综上可知**引理 4** 成立。

以上构造给出所有 $[n,3,d]$ 距离最优码，当 $r=1$ 时，局部度已达到最优。当 $r\geqslant 2$ 时，$[4,3,2;3]$，$[5,3,3;3]$，$[6,3,4;3]$，$[7,3,4;2]$，$[8,3,5;2]$ 以及 $[9,3,6;2]$LRC 达到 S-L 界；$[23,3,16;2]$，$[52,3,39;2]$，$[53,3,40;2]$LRC 达不到 S-L 界或 C-M 界，其余的 LRC 能达到 C-M 界。

2.3　$[n,4,d;r]$距离最优 LRC 的构造

下面分 $5\leqslant n\leqslant 85$，$86\leqslant n_1\leqslant 170$，$171\leqslant n_2\leqslant 255$ 和 $n_3\geqslant 255$ 四种情形讨论四维 LRC 的构造。

2.3.1　$5\leqslant n\leqslant 85$ 时距离最优 LRC 的构造

由文献[20]知，当 $k=4$ 时，若 $d\in\{3,4,7,8\}\cup[13,16]\cup[23,32]\cup[37,44]\cup[77,80]$，则 $n=g+1$，对于其他的 d 存在达到 Griesmer 界的 $[n,4,d]$ 码。便于描述，当 $5\leqslant n\leqslant 85$ 时，记达到 Griesmer 界的 $[n,4,d]$ 距离最优码的码长构成集合 $N_{1,0}$，且 $N_{1,0}=[9,10]\cup[14,17]\cup[25,32]\cup[46,50]\cup[61,85]$。当 $n\in[5,85]$ 时，若 $[n,4,d]$ 距离最优码达不到 Griesmer 界，但 $[g+85,4,d]$ 距离最优码达到 Griesmer 界，则记码长 n 构成集合 $N_{1,1}=[7,8]\cup[12,13]\cup[33,44]\cup[52,60]$；若 $[g+85,4,d]$ 距离最优码仍达不到 Griesmer 界，则记码长 n 构成集合 $N_{1,2}=[19,24]$。

此外，当 $n=6,11,18,29,32,50,65,71,76,81$ 时，虽然 $[n,4,d]$ 距离最优码达不到 Griesmer 界，但存在 $[n-1,4,d]$ 距离最优码达到 Griesmer 界；当 $n=51,66$ 时，存在 $[n-2,4,d]$ 距离最优码达到 Griesmer 界；当 $n=45$ 时，不存在 $[n-1,4,d]$ 或 $[n-2,4,d]$ 距离最优码达到 Griesmer 界。

定理 5　当 $5\leqslant n\leqslant 85$ 时，存在如下参数 $[n,4,d;r]$ 的距离最优 LRC：

1）存在 $[5,4,2;4]$ 距离最优 LRC；当 $7\leqslant n\leqslant 18$ 及 $n=33$ 时，存在 $[n,4,d;3]$ 距离最优 LRC。

2）当 $n=6$ 及 $19\leqslant n\leqslant 85$（$n\neq 33,34$）时，存在 $[n,4,d;2]$ 距离最优 LRC；特别地，当 $n=32,34,35,51,56$ 时，还存在 $[n,4,d;1]$ 距离最优 LRC。

证明：

构造以下 12 个矩阵 $\boldsymbol{G}_{4,n}$，其中 $\boldsymbol{G}_{4,17}$ 由文献[10]给出，$\boldsymbol{G}_{4,85}$ 的 6 个子块 $\boldsymbol{B}_i$ 为 4×5 矩阵。

$$\boldsymbol{G}_{4,5}=\begin{pmatrix}10001\\01001\\00101\\00011\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,6}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}01\\01\\10\\10\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,10}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}011111\\122133\\201313\\330132\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,17}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}1000 & 0111 & 0111 & 11111\\0100 & 1031 & 1022 & 12133\\0010 & 3202 & 2301 & 32113\\0001 & 1130 & 2310 & 22321\end{array}\right)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{17}),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,23}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}00111011111111111101\\11001103111333301 12\\03030213122122330 11\\30200310123311323 22\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,28}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}0110000111111111111111111\\0031111000111223311222 33\\1301223123003010113133 12\\3002123113120103031313 23\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,31}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}0100000111111111111111111111\\1011111000001133111222223333\\0011223122330000133112331 12\\1113322213232312213132121 33\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,39}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}000011110000111111111111111111111111\\011100011111000011112223311122233333\\102310001322123300230120113233123 23\\110002303312132312003002122113211 33\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,44}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}00000111110000011111111111111111111111111111\\00111002301111000011222331111112222333333\\11002000032333132223002011112331223112333\\01120120003123331200130201231232231231113\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,49}=\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}_4 & \begin{array}{c}00011111000000011111111111111111111111111111\\11100002111111100000011111122223111112222223 3\\02300230111223311223300012300230122331122332 3\\20023000123131213131212300012003223132312131 2\end{array}\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{G}_{4,55}=\begin{pmatrix}11101111010111111011001110000011111111111111111111111111\\30211023111213012103110001111100001222333331111112222 33\\13230201132012322022030031223311233230000231222331133 13\\01223012330222201223302302121323330003312003123121323 11\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{4,85}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_6\,|\,\boldsymbol{G}_{4,55})=$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}10111&00000&10111&01111&11011&11101&\\01123&00000&01123&11032&10132&20113&\\00000&10111&10111&10123&10132&12023&\boldsymbol{G}_{4,55}\\00000&01123&01123&01111&01123&01233&\end{array}\right).$$

1)$\boldsymbol{G}_{4,5}$和$\boldsymbol{G}_{4,10}$生成$[5,4,2;4]$,$[10,4,6;3]$码。当$1\leqslant i\leqslant 3$时,删除$\boldsymbol{G}_{4,10}$的后i列得到$[10-i,4,6-i;3]$距离最优 LRC。记$\boldsymbol{G}_{4,n}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,$n=17-j$,当$11\leqslant n\leqslant 17$时,$\boldsymbol{G}_{4,n}$生成$[n,4,12-j;3]$。由$\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{G}_{4,17}$,$\boldsymbol{G}_{4,18}=(\boldsymbol{G}_{4,17}\,|\,\boldsymbol{\gamma})$可得$[18,4,12;3]$。当$n=33,34$时,由$\boldsymbol{G}_{4,n}=(\boldsymbol{G}_{4,17}\,|\,\boldsymbol{G}_{4,n-17})$可得$[33,4,23;3]$与$[34,4,24;1]$码。

2)$\boldsymbol{G}_{4,6}$生成$[6,4,2;2]$码。当$n=23,28,39,44,49$时,$\boldsymbol{G}_{4,n}$生成$[23,4,16;2]$,$[28,4,20;2]$,$[39,4,28;2]$,$[44,4,32;2]$,$[49,4,36;2]$,删除$\boldsymbol{G}_{4,n}$的后i($1\leqslant i\leqslant 4$)列得到$[n-i,4,d;2]$距离最优 LRC。$\boldsymbol{G}_{4,31}$生成$[31,4,22;2]$码,删除$\boldsymbol{G}_{4,31}$的后 2 列得到$[n-i,4,d;2]$距离最优 LRC。当$n=31,49$时,由$\boldsymbol{G}_{4,n+1}=(\boldsymbol{G}_{4,n}\,|\,\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{G}_{4,n}$可得$[n+1,4,d;2]$距离最优 LRC。

$\boldsymbol{G}_{4,85}$生成$[85,4,64;2]$码,删除$\boldsymbol{G}_{4,85}$的子矩阵$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_i)$,$1\leqslant i\leqslant 6$可得$[85-5i,4,64-4i;2]$距离最优 LRC。当$n=55,70,75,80,85$,$1\leqslant i\leqslant 4$时,删除$\boldsymbol{G}_{4,n}$的后$i$列得到的矩阵生成$[n-i,4,d;2]$距离最优 LRC。

考察$\boldsymbol{M}_4$及其子矩阵,$\boldsymbol{M}_4$生成$[64,4,48;2]$码,当$1\leqslant i\leqslant 8$时,删除$\boldsymbol{M}_4$的后i列得到$[64-i,4,48-i;2]$距离最优 LRC。

特别地,当$i=16,17,28$时,由$\boldsymbol{A}_{4,2i}=(\boldsymbol{G}_{4,i}\,|\,\boldsymbol{G}_{4,i})$可得$[2n,4,2d;1]$距离最优 LRC。由$\boldsymbol{G}'_{4,35}=(\boldsymbol{G}_{4,34}\,|\,\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{G}_{4,34}$可得$[35,4,24;1]$LRC,由$\boldsymbol{G}_{4,51}=(3\boldsymbol{G}_{4,17})$可得$[51,4,36;1]$LRC。

综上可知**定理 5** 成立。

2.3.2 $86\leqslant n_1\leqslant 170$时距离最优 LRC 的构造

当$86\leqslant n_1\leqslant 170$时,由距离最优 LRC $\boldsymbol{C}_1=[n_1,4,d_1;r_1]$和$\boldsymbol{C}_2=[n_2,4,d_2;r_2]$的生成矩阵构造距离最优 LRC $\boldsymbol{C}=[n_1+n_2,4,d_1+d_2;r]$的生成矩阵,其中$r\leqslant\max\{r_1,r_2\}$,通过删除$\boldsymbol{C}$的生成矩阵的子矩阵(或列向量)得到新的距离最优 LRC 的生成矩阵。

定理 6 记$n_1=n+85(n\in[1,85])$,当$86\leqslant n_1<170$时,存在$[n_1,4,d;2]$距离最优 LRC;特别地,当$n_1=88,98,124,126,128,129,130,140,150,151,156,158,160,161,166,168,170$时,还存在$[n_1,4,d;1]$距离最优 LRC。

证明:

1)当$n\in N_{1,0}$,$n\in N_{1,2}$或$n\in[1,5]$时,取$n\in[1,5]\cup[9,10]\cup[14,17]\cup[25,31]\cup[46,50]\cup[61,85]\cup[19,24]$,构造$\boldsymbol{G}_{4,n_1}=(\boldsymbol{S}_4\,|\,\boldsymbol{G}_{4,n})$,其中$\boldsymbol{G}_{4,5}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_5)$及其子矩阵$\boldsymbol{G}_{4,i}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$($1\leqslant i\leqslant 4$),由此可得$[n_1,4,d;2]$距离最优 LRC。

2)当$n\in N_{1,1}$时,结合$N_{1,1}$的定义,便于描述,记$n_g=g+85$,下面分情况讨论。

①当$n_g\in[91,93]$时,构造$\boldsymbol{G}_{4,n_g}=(\boldsymbol{G}_{4,75}\,|\,\boldsymbol{G}_{4,n_1-75})$;当$n_g\in[96,98]$时,构造$\boldsymbol{G}_{4,n_g}=(\boldsymbol{G}_{4,80}\,|\,\boldsymbol{G}_{4,n_g-80})$,以上得到的均为$[n_g,4,d;2]$距离最优 LRC。

②$n_g\in[117,128]$时,构造$\boldsymbol{G}_{4,128}=(\boldsymbol{G}'_{4,64}\,|\,\boldsymbol{G}''_{4,64})$,$\boldsymbol{G}_{4,128}$生成$[128,4,96;2]$码。对$\boldsymbol{S}_4$进行列置换时可得$\boldsymbol{S}'_4=(\boldsymbol{G}'_{4,64}\,|\,\boldsymbol{G}'_{4,21})$,其中

$$\boldsymbol{G}'_{4,64}=\begin{pmatrix}11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111\\01230000001231231231230001230001230001231231231231231231231123\\00001230001112223330001230001230001231112223331112223331112223 33\\00000001230000000001111112222223333331111111112222222233333333\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}'_{4,21}=\begin{pmatrix}000000000000000000000\\100111101010111111111\\010123010101123123123\\001000112233111222333\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{M}_4$的第 1 行与第 4 行相减可得$[64,4,48;2]$的生成阵$\boldsymbol{G}''_{4,64}$,

$$\boldsymbol{G}''_{4,64}=\begin{pmatrix}01011101011110111101111011101011110111011110111011101011110111011111 0111\\00112301123011230112301123011230011230112301123011230011230112301123\\00000011111112222223333300000011111122222333330000001111111222223333\\10100010100001000010003233232333323333233322232222322222322223222\end{pmatrix}.$$

下面给出$\boldsymbol{G}_{4,128}$的 2 个子矩阵$\boldsymbol{G}'_{4,5}$和$\boldsymbol{G}''_{4,5}$,且$\boldsymbol{G}'_{4,5}$和$\boldsymbol{G}''_{4,5}$的 2 个非零行向量生成$[5,2,4]$距离最优码,

$$\boldsymbol{G}'_{4,5}=\begin{pmatrix}11110\\00000\\00000\\01231\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}''_{4,5}=\begin{pmatrix}11101\\12310\\00000\\01322\end{pmatrix}。$$

依次从 $\boldsymbol{G}_{4,128}$ 中删除 $\boldsymbol{G}'_{4,5}$ 与 $\boldsymbol{G}''_{4,5}$ 分别得到[123,4,92;2]的生成阵 $\boldsymbol{G}_{4,123}$ 以及[118,4,88;2]的生成阵 $\boldsymbol{G}_{4,118}$。当 $n_1=123,128$ 时，删除 $\boldsymbol{G}_{4,n_1}$ 的后 i $(1\leqslant i\leqslant 4)$列得到$[n_1-i,4,d;2]$距离最优 LRC。删除 $\boldsymbol{G}_{4,118}$ 的最后 1 列得到的 $\boldsymbol{G}_{4,117}$ 生成[117,4,87;2]。$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\in\boldsymbol{G}_{4,128}$时，令 $\boldsymbol{G}_{4,129}=(\boldsymbol{G}_{4,128}\mid\boldsymbol{\gamma}_1)$，$\boldsymbol{G}_{4,130}=(\boldsymbol{G}_{4,129}\mid\boldsymbol{\gamma}_2)$，得到[129,4,96;2]，[130,4,96;2]距离最优 LRC。

③$136\leqslant n_g\leqslant 144$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{4,n_g}=(\boldsymbol{M}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,n_g-64})$；当 $145\leqslant n_g\leqslant 170$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{4,n_g}=(\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,n_g-85})$，以上得到的均为$[n_g,4,d;2]$距离最优 LRC。

3)特别地，当 $i=44,49,62,63,64,65,70,75,78,79,80,83,84,85$ 时，令 $\boldsymbol{A}_{4,2i}=(\boldsymbol{G}_{4,i}\mid\boldsymbol{G}_{4,i})$，得到$[2i,4,2d;1]$距离最优 LRC。

综上可知**定理 6** 成立。

2.3.3　$171\leqslant n_2\leqslant 255$ 时距离最优 LRC 的构造

类似于 2.3.2 节，给出码长 $171\leqslant n_2\leqslant 255$ 的四元距离最优 LRC 的构造。

定理 7　记 $n_2=n+170$，$n\in[1,85]$，当 $n_2\in[176,178]\cup[181,183]\cup[202,214]\cup[222,230]$ 时，存在$[n_2,4,d;2]$距离最优 LRC；对于其他码长 n_2 存在$[n_2,4,d;1]$距离最优 LRC。特别地，当 $n=204$ 时，还存在距离最优 LRC[204,4,152;1]。

证明：当 $n\in N_{1,0}$ 或 $n\in[1,5]$ 时，令 $\boldsymbol{G}_{4,n_2}=(\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,n})$，得到$[n_2,4,d;1]$距离最优 LRC；当 $n\in N_{1,1}$时，令 $\boldsymbol{G}_{4,n_2}=(\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,n+85})$，得到参数为$[n_2,4,d;2]$的距离最优 LRC；当 $n_2\in[189,192]$时，令 $\boldsymbol{G}_{4,n_2}=(\boldsymbol{M}_4\mid\boldsymbol{M}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,n_2-128})$，其中 $\boldsymbol{G}_{4,61}$，$\boldsymbol{G}_{4,62}$ 与 $\boldsymbol{G}_{4,63}$ 是 $\boldsymbol{M}_4$ 的子矩阵，得到$[n_2,4,d;1]$距离最优 LRC。

特别地，当 $i=102$ 时，由 $\boldsymbol{A}_{4,2i}=(\boldsymbol{G}_{4,i}\mid\boldsymbol{G}_{4,i})$可得[204,4,152;1]距离最优 LRC。

综上可知**定理 7** 成立。

2.3.4　$n_3\geqslant 255$ 时距离最优 LRC 的构造

由已构造的四元距离最优码构造码长 $n_3\geqslant 255$ 的四元距离最优 LRC 并判断$[n,4,d;r]$$(n\geqslant 5)$距离最优 LRC 的局部度最优性。

定理 8　记 $n_3=85i+n$，$i\geqslant 3$ 且 $n\in[1,85]$。若 $n_3\in[274,279]$，存在$[n_3,4,d;2]$距离最优 LRC；对于其他码长 n_3 存在$[n_3,4,d;1]$距离最优 LRC。

证明：

当 $n_3=85i+n(i\geqslant 3)$且 $n\in N_{1,0}$ 或 $n\in N_{1,1}$时，令 $\boldsymbol{G}_{4,n_3}=(\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,85(i-1)+n})$，得到$[n_3,4,d;1]$距离最优 LRC；当 $n_3=85i+n(i=3)$且 $n\in N_{1,2}$ 时，令 $\boldsymbol{G}_{4,n_3}=\boldsymbol{G}_{4,255+n}=(\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,170+n})$，得到$[n_3,4,d;2]$距离最优 LRC；当 $n_3=85i+n(i\geqslant 4)$时，令 $\boldsymbol{G}_{4,n_3}=(\boldsymbol{S}_4\mid\boldsymbol{G}_{4,n})$，得到$[n_3,4,d;1]$距离最优 LRC。

综上可知**定理 8** 成立。

以上构造给出所有$[n,4,d]$距离最优码，当 $r=1$ 时，局部度已达到最优。当 $r\geqslant 2$ 时，若 $n\in[5,10]$，$[n,4,d;r]$为达到 S-L 界的距离最优 LRC；$n\in\{19,24,33,40,45,66,87,93,114,119,135,145\}\cup[103,109]\cup[176,178]\cup[181,183]\cup[202,214]\cup[222,230]\cup[274,279]$且 $n\neq 204$ 时，$[n,4,d;r]$为未达到 S-L 界或 C-M 界的距离最优 LRC；其余的为达到 C-M 界的距离最优 LRC。

3　结语

结合 Grassl 码表[17]及文献[20]，对于四元线性码$[n,k,d]$，根据码的维数分 $k=2,3,4$ 三种情形构造码长 $n\geqslant k+1$ 的距离最优 LRC。当 $r=1$ 时，局部度达到最优。$r\geqslant 2$ 的$[n,k,d;r]$距离最优 LRC 的局部度最优性如下：$n\in[3,5]$时，$[n,2,d;2]$码达到 S-L 界，[7,2,5;2]和[9,2,7;2]码达不到 S-L 界或 C-M 界，它们仍是局部度最优的；$[n,3,d;r]$$(n\in[4,9])$码达到 S-L 界，$[n,3,d;2]$$(n=23,52,53)$码达不到 S-L 界或 C-M 界，其余的 LRC 达到 C-M 界；当 $n\in[5,10]$时，$[n,4,d;r]$LRC 达到 S-L 界，52 个 LRC 达不到 S-L 界或 C-M 界。对于以上 55 个局部度较小仍达不到 S-L 界或 C-M 界的 LRC，我们未能判定其局部度的最优性，这也是我们接下来要研究的问题。

参考文献

[1] WEATHERSPOON H, KUBIATOWICZ J D. Erasure Coding vs. Replication: a Quantitative Comparison[C] //Proceeding of International Workshop on Peer-to-Peer Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002: 328-337.

[2] HUANG C, SIMITCI H, XU Y K, et al. Erasure Coding in Windows Azure Storage[C]//Proceeding of USENIX Annual Technical Conference. Berkeley, CA: USENIX Association, 2012: 15-26.

[3] BALAJI S B, KRISHNAN M N, VAJHA M, et al. Erasure Coding for Distributed Storage: an Overview [J]. Science China Information Sciences, 2018, 61 (10): 1-45.

[4] GOPALAN P, HUANG C, SIMITCI H, et al. On the Locality of Codeword Symbols[J]. IEEE Transac-

tions on Information Theory, 2012, 58(11): 6925-6934.

[5] CADAMBE V, MAZUMDAR A. An Upper Bound on the Size of Locally Repairable Codes[C]//Proceeding of International Symposium on Network Coding. Calgary, AB, Canada: IEEE, 2013: 1-5.

[6] GOPARAJU S, CALDERBANK R. Binary Cyclic Codes that are Locally Repairable[C]//Proceeding of International Symposium on Information Theory. Honolulu, HI, USA: IEEE, 2014: 676-680.

[7] LUO Y, XING C, YUAN C. Optimal Locally Repairable Codes of Distance 3 and 4 via Cyclic Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019, 65(2):1048-1053.

[8] JIN L F. Explicit Construction of Optimal Locally Recoverable Codes of Distance 5 and 6 via Binary Constant Weight Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019, 65(8): 4658-4663.

[9] HAO J, XIA S T, CHEN B. On Optimal Ternary Locally Repairable Codes[C]//Proceeding of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Aachen: IEEE, 2017: 171-175.

[10] FU Q, LI R H, GUO L B, et al. Singleton-Type Optimal LRCs with Minimum Distance 3 and 4 from Projective Code[J]. IEICE Trans on Fundamentals, 2021 (E104-A1): 319-323.

[11] SILBERSTEIN N, ZEH A. Optimal Binary Locally Repairable Codes via Anticodes[C]//Proceeding of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Hong Kong: IEEE, 2015: 1247-1251.

[12] 杨瑞硒, 李瑞虎, 郭罗斌, 等. 五维三元最优线性码的局部度[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2017,18(4): 105-111.

[13] WESTERBACK T, ERNVALL T, HOLLANTI C. Almost Affine Locally Repairable Codes and Matroid Theory[C] //Proceeding of Information Theory Workshop. Hobart, TAS, Australia: IEEE, 2014: 621-625.

[14] ERNVALL T, WESTERBACK T, HOLLANTI C. Constructions of Optimal and Almost Optimal Locally Repairable Codes[C]//Proceeding of International Conference on Wireless Communications, Vehicular Technology, Information Theory and Aerospace Electronic Systems (VITAE). Aalborg, Denmark: IEEE, 2014: 1-5.

[15] BARG A, HAYMAKER K, HOWE E, et al. Locally Recoverable Codes from Algebraic Curves and Surfaces [M]. Los Angeles: Springer Press, 2016: 95-127.

[16] JIN L F, MA L M, XING C P. Construction of Optimal Locally Repairable Codes via Automorphism Groups of Rational Function Fields[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2020, 66(1): 210-221.

[17] GRASSL M. Bounds on the Minimum Distance of Linear Codes [EB/OL]. (2007-01-01) [2021-01-06]. http://www. Codetables. de.

[18] FEULNER T. Classification and Nonexistence Results for Linear Codes with Prescribed Minimum Distances[J]. Designs, Codes and Cryptography, 2014, 70(1): 127-138.

[19] BOUYUKLIEV I, GRASSL M, VARBANOV Z. New Bounds for $n_4(k,d)$ and Classification of Some Optimal Codes over GF(4)[J]. Discrete Mathematics, 2004, 281(1/2/3): 43-66.

[20] TATSUYA M. Griesmer Bound for Linear Codes over Finite Fields [EB/OL]. (2020-10-16) [2021-01-06]. http:// mars39. lomo. jp/opu/griesmer. htm.

(编辑:姚树峰)