

基于虚拟阵元冗余平均的对称嵌套 MIMO 雷达 DOA 估计

张宇乐¹, 胡国平¹, 周豪¹, 朱明明¹, 赵飞龙²

(1. 空军工程大学防空反导学院, 西安, 710051; 2. 93951 部队, 青海格尔木, 816000)

摘要 针对传统算法进行 DOA 估计时因删除重复虚拟阵元而造成有效信息损失、估计性能不佳等问题, 提出基于虚拟阵元冗余平均的对称嵌套 MIMO 雷达 DOA 估计算法。首先, 将一组密布均匀线阵和一组稀疏均匀线阵分别以零点为中心对称排列, 构成单基地 MIMO 雷达的发射阵列和接收阵列, 将传统的虚拟阵元由“差联合”结构变成对称“和联合”结构形式, 提高了系统的自由度、降低了阵元互耦, 并将其应用于非相干目标和全相干目标 DOA 估计; 其次, 向量化样本协方差矩阵, 将“和差联合”阵列重复的虚拟阵元进行冗余平均处理后重构 Toeplitz 矩阵; 最后, 结合 MUSIC 算法进行非相干目标 DOA 估计, 有效提升了目标估计个数和角度估计性能。仿真实验验证了阵列结构和算法的有效性。

关键词 MIMO 雷达; 对称嵌套阵; DOA 估计; “和差联合”阵列; 冗余平均

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2020.06.013

中图分类号 TN953 文献标志码 A 文章编号 1009-3516(2020)06-0079-08

A Symmetric Nested MIMO Radar DOA Estimation Based on Virtual Array Redundancy Averaging

ZHANG Yule¹, HU Guoping¹, ZHOU Hao¹, ZHU Mingming¹, ZHAO Feilong²

(1. Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

2. Unit 93951, Geermu 816000, Qinghai, China)

Abstract Aimed at the problems that being caused by deleting the repeated virtual array during DOA estimation, effective information and estimation performance are lost and poor, a symmetric nested MIMO radar DOA estimation algorithm is proposed based on redundancy average of virtual array. Firstly, a set of uniform linear array and a set of sparse uniform linear array are arranged symmetrically by taking zero as a center to constitute a monostatic Multiple-Input Multiple-Output radar transmitting array and a receiving array. The array structure is to change the conventional virtual array for a symmetric sum coarray structure from the difference coarray structure, thus increasing the degree of freedom, reducing the mutual coupling of the system, and applying it in uncorrelated and coherent targets DOA estimation. Secondly, the vectorized sample covariance matrix and the Toeplitz matrix are reconstructed by averaging the redundant

收稿日期: 2020-07-16

基金项目: 国家自然科学基金(61871395)

作者简介: 张宇乐(1997—), 男, 陕西咸阳人, 硕士生, 主要从事阵列信号处理研究。E-mail: 874474324@qq.com

通信作者: 胡国平(1964—), 男, 江西南昌人, 教授, 博士生导师, 主要从事雷达信号处理、雷达反隐身技术、无线通信技术和图像处理研究。E-mail: hgp6068@163.com

引用格式: 张宇乐, 胡国平, 周豪, 等. 基于虚拟阵元冗余平均的对称嵌套 MIMO 雷达 DOA 估计[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2020, 21(6): 79-86. ZHANG Yule, HU Guoping, ZHOU Hao, et al. Symmetric Nested MIMO Radar DOA Estimation Based on Virtual Array Redundancy Averaging[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2020, 21(6): 79-86.

virtual elements of sum-difference coarray. Finally, the combination of the proposed algorithm with the MUSIC algorithm for DOA estimation effectively improves the performance of target estimation number and angle estimation. The simulation results show that the proposed array structure and algorithm are effective.

Key words MIMO radar; symmetric nested array; direction of arrival estimation; sum-difference coarray; redundancy average

MIMO 雷达^[1]具有良好的空间、频率、波形分集特性,能形成有效的大观测孔径,对增大虚拟阵元孔径^[4]、优化检测和跟踪性能^[5]、提高测向分辨率和精度^[7]等具有重要意义,陆续有学者从 DOA 估计、多参数联合估计、非理想阵列条件下阵列参数估计等方面系统开展了 MIMO 雷达测向研究。传统 MIMO 雷达通常采用密布均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA)作为发射和接收阵列进行 DOA 估计,其回波信号模型中的虚拟阵元个数受到物理阵元数限制,导致阵列的 DOA 估计性能受阵列孔径影响。嵌套阵^[8](Nested Array, NA)的高自由度特征可以突破物理阵元个数的限制,有效提高阵列孔径,并且能得到确定的阵元位置和自由度闭式解。为提高嵌套阵虚拟阵元数,文献[9]建立了超级嵌套阵结构,该结构具有传统嵌套阵的所有优势,同时有效降低了阵元间互耦。文献[10]通过引入附加阵元建立了改进嵌套阵结构,自由度得到较大提升。上述算法仅仅利用了稀疏阵矢量化后形成的“差联合阵列”来扩展有效孔径,自由度扩展有限。MIMO 雷达能够通过匹配滤波得到“和联合阵列”,实现虚拟孔径的扩展,将嵌套阵列与 MIMO 雷达体制结合,便可实现从“差联合阵列”到“和差联合阵列”的转变,从而进一步提升系统自由度。因此,将嵌套阵列与 MIMO 雷达体制结合起来开展多目标测向具有重要的理论意义和应用前景。

文献[11]采用二阶嵌套 MIMO 雷达,其发射和接收阵列均为二阶嵌套阵,增大了系统自由度,但其“和联合”阵列条件下的虚拟阵元存在不连续的问题,解决方法是选取连续的虚拟阵元进行 DOA 估计,但会损失掉离散虚拟阵元,自由度性能未得到充分利用。文献[12]通过设计发射和接收阵元间距,提出一种优化嵌套 MIMO 的无孔差合阵列,但其“和联合阵列”也不连续。文献[13]将嵌套子阵重新排在嵌套阵的两侧,提出了一种高自由度低复杂度的增强嵌套阵,并给出了实际阵元位置的 4 种形式。

综合考虑自由度、连续虚拟阵元等因素,本文提出一种对称嵌套阵结构,其发射阵列和接收阵列分别由 2 个以零点为参考中心布列的密布均匀线阵和稀疏均匀线阵组成,该阵列结构将传统虚拟阵元由

“差联合”结构形式转化为对称“和联合”结构形式,形成的连续虚拟阵元数多,因此其可估计的目标数更多,角度估计性能更好,且接收阵元间距变大,互耦率更低,有助于提高测向精度。另外,针对现有算法都是删除“和差联合”阵列形成的重复虚拟阵元而丢失数据信息的问题,本文通过冗余平均处理后重构 Toeplitz 矩阵^[14],结合 MUSIC 算法实现 DOA 估计。该算法可以在不损失阵列有效孔径的条件下实现更多目标的 DOA 估计。

1 对称嵌套 MIMO 雷达系统模型

考虑单基地收发分置系统,对称嵌套 MIMO 雷达系统见图 1,将 2 个均匀线阵以原点为中心对称布列,发射阵列由密布均匀线阵组成,共有 $M_t = 4M - 1$ 个阵元,阵元间距为 d ;接收阵列由稀疏均匀线阵组成,共有 $N_r = 2N - 1$ 个阵元,阵元间距为 $2Md$, d 为单位阵元间距,一般等于半波长 $\lambda/2$, λ 为信号波长。

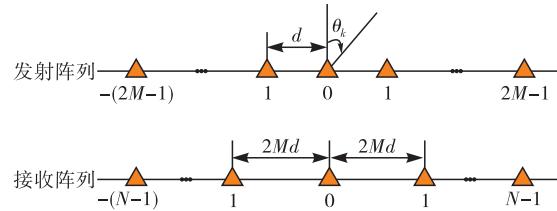


图 1 单基地对称嵌套 MIMO 雷达结构图

假设空间中存在 K 个远场点目标,第 k ($k = 1, 2, \dots, K$) 个目标的波达方向和反射系数分别为 θ_k 和 β_k ,则单基地对称嵌套 MIMO 雷达回波信号模型可表示为:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\alpha}_r(\theta_k) \beta_k \boldsymbol{\alpha}_t^T(\theta_k) \mathbf{b}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{b}(t) = [b_{-(2M-1)}(t), \dots, b_{(-1)}(t), b_0(t), b_1(t), \dots, b_{(2M-1)}(t)]^T$ 为发射信号; $\mathbf{w}(t) = [\omega_{-(N-1)}(t), \dots, \omega_{(-1)}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \dots, \omega_{(N-1)}(t)]^T$ 为接收阵元处的加性高斯白噪声; $\boldsymbol{\alpha}_t(\theta_k)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_r(\theta_k)$ 分别为第 k 个目标的发射导向矢量和接收导向矢量,具体可表示为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_t(\theta_k) &= [e^{j2\pi d Q \sin \theta_k / \lambda}, \dots, 1, \dots, e^{-j2\pi d Q \sin \theta_k / \lambda}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_r(\theta_k) &= [e^{j2\pi(2Md) P \sin \theta_k / \lambda}, \dots, 1, \dots, e^{-j2\pi(2Md) P \sin \theta_k / \lambda}]^T \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $Q=2M-1; P=N-1$ 。

利用 MIMO 雷达发射波形为相互正交脉冲信号,即 $\mathbf{R}_b = \mathbb{E}[\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^H] = \mathbf{I}_{4M-1}$ 的特点,将回波信号进行广义匹配滤波可得:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^K \beta_k (\mathbf{a}_t(\theta_k) \otimes \mathbf{a}_r(\theta_k)) + \mathbf{n}(t) = \\ &[\mathbf{a}_t(\theta_1) \otimes \mathbf{a}_r(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_t(\theta_K) \otimes \mathbf{a}_r(\theta_K)] \mathbf{s}(t) + \\ &\mathbf{n}(t) = (\mathbf{A}_t \odot \mathbf{A}_r) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\end{aligned}\quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}_t = [\mathbf{a}_t(\theta_1), \mathbf{a}_t(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_t(\theta_K)]; \mathbf{A}_r = [\mathbf{a}_r(\theta_1), \mathbf{a}_r(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_r(\theta_K)]; \mathbf{s}(t) = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K]^T$; $\mathbf{n}(t)$ 为加性高斯白噪声矢量; \otimes 和 \odot 分别表示 Kronecker 积和 Khatri-Rao 积。

根据式(3)可得回波信号的协方差矩阵为:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] = \\ &(\mathbf{A}_t \odot \mathbf{A}_r) \mathbf{R}_s (\mathbf{A}_t \odot \mathbf{A}_r)^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{(4M-1)(2N-1)} = \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H + \\ &\sigma_n^2 \mathbf{I}_{(4M-1)(2N-1)}\end{aligned}\quad (4)$$

式中: $\mathbf{R}_s = \mathbb{E}[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H] = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2]$ 为目标协方差矩阵; σ_k^2 为第 k 个目标的信号能量; $\mathbf{A} = \mathbf{A}_t \odot \mathbf{A}_r$; σ_n^2 为噪声方差。

向量化协方差矩阵 \mathbf{R} 可得:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \text{vec}(\mathbf{R}) = \\ &(\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \mathbf{p} + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_{(4M-1)(2N-1)}) = \\ &(\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \mathbf{p} + \sigma_n^2 \mathbf{l}_{((4M-1)^2(2N-1)^2 \times 1)}\end{aligned}\quad (5)$$

式中: $\text{vec}(\cdot)$ 表示向量化运算;

$$\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A} = [\mathbf{a}_t^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}_r^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}_t(\theta_1) \otimes \mathbf{a}_r(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_t^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}_r^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}_t(\theta_K) \otimes \mathbf{a}_r(\theta_K)] \quad (6)$$

为单快拍测量矢量 \mathbf{r} 的虚拟阵列方向矩阵; $\mathbf{p} = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2]^T$; $(\cdot)^*$ 表示矩阵的复共轭运算。

2 对称嵌套 MIMO 雷达虚拟阵元扩展

如图 1 所示,可得发射阵列阵元位置集合 S_t 为:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t = S_{t1} \cup S_{t2} \\ S_{t1} = \{s_{t1} | s_{t1} = -md, 0 \leq m \leq 2M-1\} \\ S_{t2} = \{s_{t2} | s_{t2} = md, 0 \leq m \leq 2M-1\} \end{array} \right. \quad (7)$$

接收阵列阵元位置集合 S_r 为:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_r = S_{r1} \cup S_{r2} \\ S_{r1} = \{s_{r1} | s_{r1} = -2Mnd, 0 \leq n \leq N-1\} \\ S_{r2} = \{s_{r2} | s_{r2} = 2Mnd, 0 \leq n \leq N-1\} \end{array} \right. \quad (8)$$

由式(3)可知,矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_t \odot \mathbf{A}_r$ 的虚拟阵元位置由物理阵元位置的“和联合阵列”组成。具体分为以下 4 种情况:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{\text{sum}} = \tilde{S}_{11} \cup \tilde{S}_{12} \cup \tilde{S}_{21} \cup \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{11} = S_{t1} + S_{r1} = \{\tilde{s}_{11} | \tilde{s}_{11} = -(m+2Mn)d\} \\ \tilde{S}_{12} = S_{t1} + S_{r2} = \{\tilde{s}_{12} | \tilde{s}_{12} = (-m+2Mn)d\} \\ \tilde{S}_{21} = S_{t2} + S_{r1} = \{\tilde{s}_{21} | \tilde{s}_{21} = (m-2Mn)d\} \\ \tilde{S}_{22} = S_{t2} + S_{r2} = \{\tilde{s}_{22} | \tilde{s}_{22} = (m+2Mn)d\} \end{array} \right. \quad (9)$$

式中: $0 \leq m \leq 2M-1; 0 \leq n \leq N-1$ 。并且集合 \tilde{S}_{sum} 中连续的虚拟阵元范围为 $[-(2MN-1), 2MN-1]$, 总的虚拟阵元个数为 $4MN-1$ 。

由式(6)可知,矩阵 $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$ 的虚拟阵元位置由物理阵元位置的“和差联合阵列”组成。即:

$$\tilde{S}_{\text{sum-diff}} = \{\tilde{S}_{\text{sum-diff}} | \tilde{S}_{\text{sum-diff}} = \tilde{S}_1 - \tilde{S}_2, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \in \tilde{S}_{\text{sum}}\} \quad (10)$$

集合 $\tilde{S}_{\text{sum-diff}}$ 中连续的虚拟阵元范围为 $[-(4MN-2), 4MN-2]$, 总的虚拟阵元个数为 $8MN-3$ 。

通过以上分析可知,“和联合阵列”和“和差联合阵列”可以实现对称嵌套 MIMO 雷达虚拟孔径扩展,进一步提升自由度。

3 DOA 估计

3.1 非相干目标 DOA 估计

根据式(9),可从式(3)中选取与扩展后的虚拟阵元位置对应的数据,重新排列后建立新的观测矢量:

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_0(t) \quad (11)$$

式中: $\mathbf{A}_0 = [\mathbf{a}_0(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_0(\theta_K)]$, $\mathbf{n}_0(t)$ 为对应位置的噪声矢量,且 $\mathbf{a}_0(\theta_k) = [e^{j2\pi dZ \sin \theta_k / \lambda}, \dots, 1, \dots, e^{-j2\pi dZ \sin \theta_k / \lambda}]^T$, 其中, $Z = 2MN-1$ 。

由式(11)可得协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0(t)\mathbf{x}_0^H(t)] = \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_s \mathbf{A}_0^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{4MN-1} \quad (12)$$

因此,通过“和联合阵列”估计非相干目标,可对式(12)进行特征值分解,然后采用 MUSIC 算法进行 DOA 估计。

非相干目标 DOA 估计也可以从“和差联合阵列”角度求解,将 $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$ 中虚拟阵元进行冗余平均,并按照虚拟阵元位置从小到大重新排序,可构造 $(8MN-3) \times K$ 维的方向矩阵 \mathbf{A}_1 :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{B_1(\theta_1)}{L_1} & \frac{B_1(\theta_2)}{L_1} & \dots & \frac{B_1(\theta_K)}{L_1} \\ \frac{B_2(\theta_1)}{L_2} & \frac{B_2(\theta_2)}{L_2} & \dots & \frac{B_2(\theta_K)}{L_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{B_{8MN-3}(\theta_1)}{L_{8MN-3}} & \frac{B_{8MN-3}(\theta_2)}{L_{8MN-3}} & \dots & \frac{B_{8MN-3}(\theta_K)}{L_{8MN-3}} \end{bmatrix} =$$

$$[\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (13)$$

式中: $L_\epsilon (1 \leq \epsilon \leq 8MN-3)$ 为式(10)中第 ϵ 个虚拟阵元位置的冗余度,即“和差联合”阵列中虚拟阵元出现的次数; $B_\epsilon(\theta_k)$ 为 $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$ 中能形成同一虚拟阵元位置的导向矢量的叠加; $\mathbf{a}(\theta_i) = [e^{-j\beta_i z_1}, e^{-j\beta_i z_2}, \dots, e^{-j\beta_i z_{8MN-3}}]$, 其中 $\beta_i = 2\pi \sin \theta_i / \lambda$, $z_\epsilon (1 \leq \epsilon \leq 8MN-3)$ 为虚拟阵元位置。

此时,相应的回波信号矢量为:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{p} + \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{l}}_{8MN-3} \quad (14)$$

式中: $\tilde{\mathbf{l}}_{8MN-3} = [n_1, n_2, \dots, n_{(8MN-3)}]^T$ 为 $\mathbf{l}_{((4M-1)^2(2N-1)^2 \times 1)}$ 中冗余数据平均后并重新排列的矢量。

为充分利用扩展的虚拟阵元, 利用 \mathbf{r}_1 建立 Toeplitz 矩阵如下:

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{(8MN-3)} \\ r_2^* & r_1 & \cdots & r_{(8MN-3)-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{(8MN-3)}^* & r_{(8MN-3)-1}^* & \cdots & r_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中:

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{i=1}^K \mathbf{p}_i e^{-j\beta_i z_\epsilon} + \sigma_n^2 n_\epsilon = \sum_{i=1}^K \mathbf{p}_i e^{-j\beta_i (z_\epsilon + z_\mu)} e^{j\beta_i z_\mu} + \\ \sigma_n^2 n_\epsilon &= \sum_{i=1}^K \mathbf{p}_i \mathbf{a}_{\epsilon+\mu}(\theta_i) \mathbf{a}_\mu^*(\theta_i) + \sigma_n^2 n_\epsilon \end{aligned} \quad (16)$$

式中: z_ϵ 和 z_μ 均为虚拟阵元位置, $\epsilon, \mu = 1, 2, \dots, 8MN-3$ ($\epsilon + \mu \leq 8MN-3$), 则式(15)可以写成矩阵的形式:

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{A}_1^H + \mathbf{N} \quad (17)$$

式中: \mathbf{p}_i 为 \mathbf{p} 中的第 i 个元素; n_ϵ 为第 ϵ 个虚拟阵元中的高斯白噪声。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_{8MN-3} \\ n_2^* & n_1 & \cdots & n_{(8MN-3)-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{8MN-3}^* & n_{(8MN-3)-1}^* & \cdots & n_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

显然 $\text{rank}(\mathbf{G}) = K$, 且 \mathbf{A}_1 为范德蒙德矩阵, 因此 $\text{rank}(\mathbf{A}_1 \mathbf{G} \mathbf{A}_1^H) = K$, 则 $\tilde{\mathbf{R}}_1$ 可以分解为信号子空间 \mathbf{U}_S 和噪声子空间 \mathbf{U}_N , 结合 MUSIC 算法进行 DOA 估计。其空间谱表达式为:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (20)$$

总结本文算法的具体步骤, 见表 1。

表 1 基于虚拟阵元冗余平均的对称嵌套 MIMO 雷达

DOA 估计算法步骤

-
- 步骤 1: 根据式(5)获取向量化的协方差矩阵;
 - 步骤 2: 根据式(13)对虚拟阵元进行冗余平均处理, 得到新的方向矩阵 \mathbf{A}_1 ;
 - 步骤 3: 根据式(14)构建回波信号矢量;
 - 步骤 4: 根据式(15)构建矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_1$;
 - 步骤 5: 对 $\tilde{\mathbf{R}}_1$ 进行特征值分解得到 \mathbf{U}_S 和 \mathbf{U}_N ;
 - 步骤 6: 根据式(20)进行谱峰搜索, 求得目标角度。
-

3.2 全相干目标 DOA 估计

全相干目标 DOA 估计, 采用“和联合”阵列求解。根据式(12), 可利用空间平滑技术结合 MUSIC 算法求解目标角度, 但会损失扩展的虚拟阵元孔径。因此, 本文采用 ℓ_1 -SVD 算法^[15] 进行 DOA 估计。此时, 全部的虚拟阵元都可以利用, 角度估计性能更佳, 具体步骤见表 2。

表 2 ℓ_1 -SVD 算法步骤

-
- 步骤 1: 根据式(11)获得观测矢量 $\mathbf{x}_0(t)$;
 - 步骤 2: 对观测矢量 $\mathbf{x}_0(t)$ 进行奇异值分解;
 - 步骤 3: 对观测矢量 $\mathbf{x}_0(t)$ 和稀疏信号进行降维(观测矢量维度由阵元数 \times 快拍数降为阵元数 \times 信源数, 稀疏信号维度由网格数 \times 快拍数降为网格数 \times 信源数);
 - 步骤 4: 求稀疏信号的 ℓ_1 范数;
 - 步骤 5: 利用 CVX 工具箱进行凸优化处理, 求得目标角度。
-

通过“和差联合阵列”进行全相干目标 DOA 估计时, 单快拍测量矢量 \mathbf{r} 的虚拟阵列方向矩阵中不同导向矢量之间由 Khatri-Rao 积关系变为 Kronecker 积, 信源协方差矩阵由对角阵变为块对角阵, 其非主对角元素为非零值。因此, 需要估计更多的元素, 导致其难以应用于全相干目标的测向。

4 克拉美罗界 (Cramér-Rao Bound, CRB)

文献[16]给出了信源个数小于物理阵元数条件下的 CRB, 不适用于“联合阵列”结构, 现推导欠定信号模型下单基地对称嵌套 MIMO 雷达 CRB 解析表达式。假设噪声方差 σ_n^2 已知。

定义 DOA 角度矢量为:

$$\boldsymbol{\eta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]^T \quad (21)$$

由文献[15]可知 Fisher 信息矩阵的第 i 行第 j 列元素为:

$$\text{FIM}_{ij} = L \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} \mathbf{R}^{-1} \right] =$$

$$L \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_i} \right]^H (\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R})^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} \quad (22)$$

式中: $\text{tr}[\cdot]$ 表示矩阵的迹; $\boldsymbol{\eta}_i$ 和 $\boldsymbol{\eta}_j$ 分别表示矢量的第 i 个和第 j 个元素。

假设

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_K} \right] \quad (23)$$

则式(22)可表示为:

$$\text{FIM} = L \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right]^H (\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R})^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (24)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = [\mathbf{A}_d \mathbf{R}_s] \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{D}^* \odot \mathbf{A} + \mathbf{A}^* \odot \mathbf{D} \quad (26)$$

$$\mathbf{D} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_K)}{\partial \theta_K} \right] \quad (27)$$

由于 \mathbf{R} 为正定矩阵, $(\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})^{-1}$ 和 $(\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})^{-1/2}$ 均为正定矩阵。则式(24)可写为:

$$\text{FIM} = \mathbf{L} \mathbf{F}^H \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})^{-1/2} \mathbf{A}_d \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0 = \text{blkdiag}[\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_s] \quad (28)$$

由此可得 DOA 估计方向的 CRB 为:

$$\text{CRB} = \frac{1}{L} (\mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \quad (29)$$

5 仿真实验和结果分析

5.1 场景设定

假设单基地对称嵌套 MIMO 雷达的发射和接收阵列的阵元数分别为 $M_t = 7, N_r = 5$, 即 $M = 2, N = 3$, 相应地设定传统 MIMO 雷达的发射阵列和

接收阵列阵元个数分别为 6, 二阶嵌套 MIMO 雷达发射阵列和接收阵列均采用 6 阵元的嵌套阵, DOA 估计的均方误差(RMSE)的计算表达式为(共 200 次蒙特卡洛实验):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{200K} \sum_{i=1}^{200} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k^i - \theta_k)^2} \quad (30)$$

式中: $\hat{\theta}_k^i$ 为第 i 次实验中 θ_k 的估计值。

5.2 自由度和互耦率

5.2.1 自由度

表 3 给出了“和联合阵列”和“和差联合阵列”结构下传统 MIMO、二阶嵌套 MIMO 和对称嵌套 MIMO 雷达的物理阵元数、连续虚拟阵元数和总虚拟阵元数。从表 3 中可以看出, 3 种 MIMO 雷达物理阵元数相同, 但对称嵌套 MIMO 雷达在“和联合阵列”条件下能够获得更多的连续虚拟阵元和总阵元数。对于向量化的样本协方差矩阵, 二阶嵌套 MIMO 和对称嵌套 MIMO 雷达得到相同的连续虚拟阵元和总虚拟阵元数。

表 3 不同阵列结构虚拟阵元数

阵列结构	物理阵元数	“和联合阵列”		“和差联合阵列”	
		连续阵元范围	总虚拟阵元数	连续阵元范围	总虚拟阵元数
传统 MIMO	6+6	[0,10]	11		
二阶嵌套 MIMO	3+3+3+3	[0,14]	17	[-22,22]	45
对称嵌套 MIMO	7+5	[-11,11]	23	[-22,22]	45

5.2.2 互耦率

根据文献[17], 可求出不同阵列结构收发阵元互耦率, 如表 4 所示。其中, Ω_t 和 Ω_r 分别表示发射阵列和接收阵列的互耦率, 互耦矩阵中的元素满足 $c_0 = 1, c_1 = 0.5e^{j\pi/4}, c_2 = 0.5e^{j0.5\pi}/2, c_3 = 0.5e^{j0.5\pi}/3, c_4 = 0.5e^{j0.5\pi}/4, B = 4$ 。由表 4 可知, 对称嵌套 MIMO 雷达因接收阵元采用阵元间距更大的稀疏均匀线阵, 相比于传统 MIMO 和二阶嵌套 MIMO 雷达, 其互耦率大幅降低。

表 4 不同阵列结构的互耦率

阵列结构	Ω_t	Ω_r
传统 MIMO	0.671 2	0.671 2
二阶嵌套 MIMO	0.586 2	0.586 2
对称嵌套 MIMO	0.694 0	0.211 6

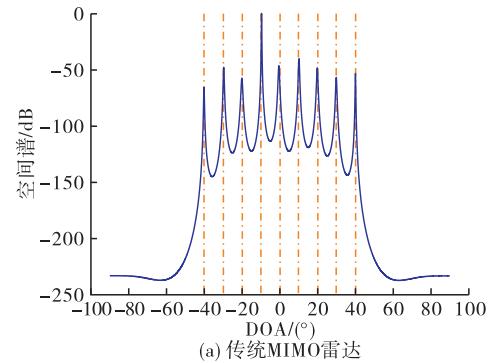
5.3 空间谱

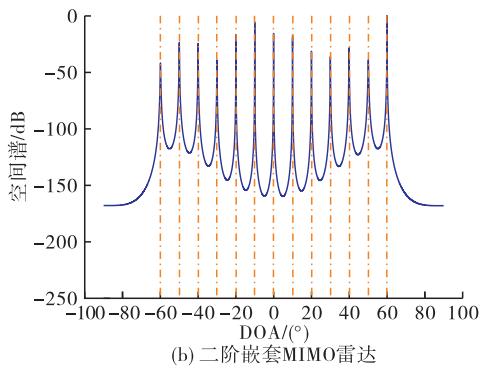
本节比较了不同类型 MIMO 雷达可检测目标个数。假设信噪比为 10 dB, 快拍数为 500, 搜索范围为 $[-90^\circ, 90^\circ]$, 搜索步长为 0.01° , 红色点画线表示真实角度方向。

5.3.1 非相干目标 DOA 估计

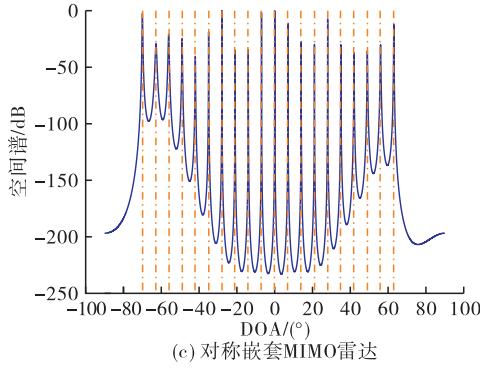
图 2 给出了“和联合阵列”结构下不同阵列结

构的空间谱图。对二阶嵌套 MIMO 雷达形成的虚拟阵元选取连续部分, 结合式(12), 采用 MUSIC 算法进行 DOA 估计。假设空间中存在 20 个非相干目标, 由图 2 可知, 传统 MIMO 雷达能够估计 $[-40^\circ : 10^\circ : 40^\circ]$ 的 9 个非相干目标, 二阶嵌套 MIMO 雷达能够估计 $[-60^\circ : 10^\circ : 60^\circ]$ 的 13 个非相干目标, 而对称嵌套 MIMO 雷达能够估计 $[-70^\circ : 7^\circ : 63^\circ]$ 的 20 个非相干目标, 且目标角度间隔最小。因此, 通过利用对称“和联合阵列”提升虚拟阵元个数, 对称嵌套 MIMO 雷达能够估计更多的非相关目标。





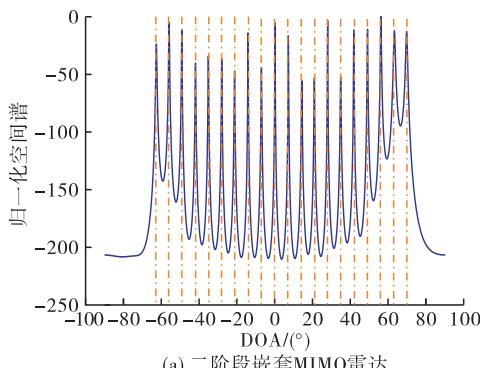
(b) 二阶嵌套MIMO雷达



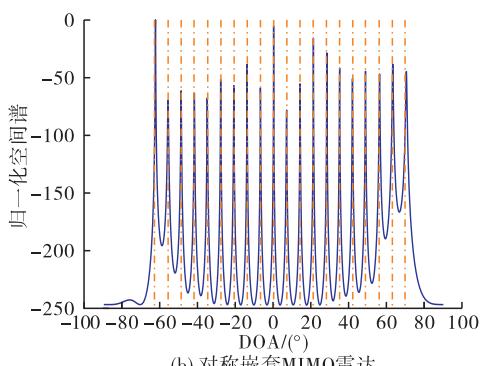
(c) 对称嵌套MIMO雷达

图 2 “和联合阵列”结构下非相干目标空间谱

图 3 给出了“和差联合阵列”结构下对称嵌套 MIMO 雷达和二阶嵌套 MIMO 雷达空间谱图。假设 DOA 角度为 $[-70^\circ : 7^\circ : 63^\circ]$, 采用 3.1 节所提算法进行角度估计。由图 3 可知, 对称嵌套 MIMO 雷达和二阶嵌套 MIMO 雷达均能够估计 20 个非相干目标。



(a) 二阶段嵌套MIMO雷达



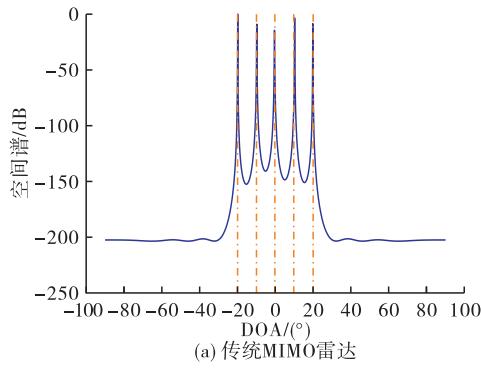
(b) 对称嵌套MIMO雷达

图 3 “和差联合阵列”结构下非相干目标空间谱

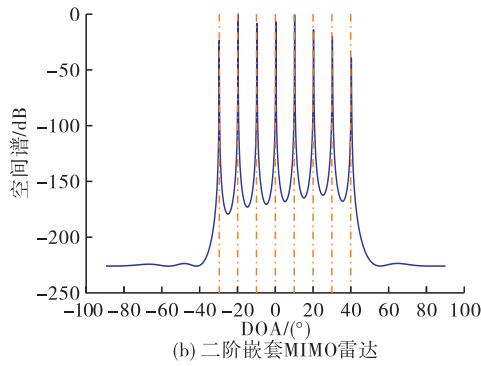
5.3.2 全相干目标 DOA 估计

图 4 给出了“和联合阵列”结构下不同阵列结构

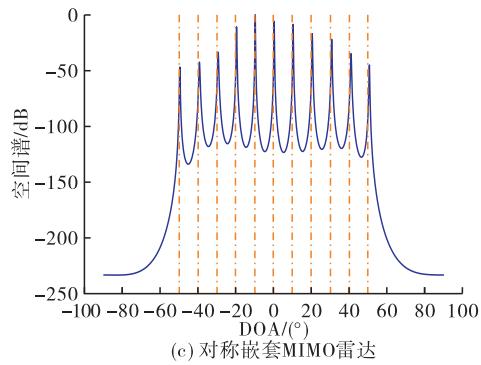
的空间谱图。假设 DOA 角度为 $[-50^\circ : 10^\circ : 50^\circ]$, 目标之间相干系数设为 1。



(a) 传统MIMO雷达



(b) 二阶嵌套MIMO雷达



(c) 对称嵌套MIMO雷达

图 4 “和联合阵列”结构下全相干目标空间谱

由图 4 可知, 传统 MIMO 雷达能估计 $[-20^\circ : 10^\circ : 20^\circ]$, 即 5 个全相干目标; 二阶嵌套 MIMO 雷达能估计 $[-30^\circ : 10^\circ : 40^\circ]$, 即 8 个全相干目标; 而对称嵌套 MIMO 雷达能够估计全部 11 个全相干目标。因此, 通过利用对称“和联合阵列”提升虚拟阵元个数, 对称嵌套 MIMO 雷达能够估计更多的相干目标。

5.4 均方误差

假设目标的角度为 $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 20^\circ, \theta_3 = 30^\circ$, 搜索步长为 0.01° 。

5.4.1 非相干目标 DOA 估计均方误差

图 5 给出了“和联合阵列”结构下不同阵列结构的均方误差对比图。图 5(a)为 DOA 估计误差随信噪比的变化关系图, 其中快拍数为 500。图 5(b)为 DOA 估计误差随快拍数的变化关系图, 其中 $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ 。结合图 5 和表 3 可以看出, 对称嵌套

MIMO雷达在“和联合阵列”结构下能够得到更多的连续虚拟阵元数和总阵元数。因此,估计性能更好。

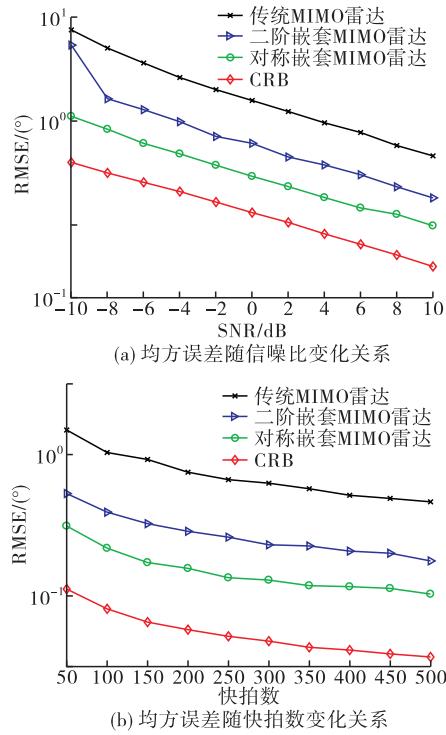


图5 “和联合阵列”结构下非相干目标估计性能对比

图6给出了“和差联合阵列”结构下不同阵列结构的均方误差对比图。

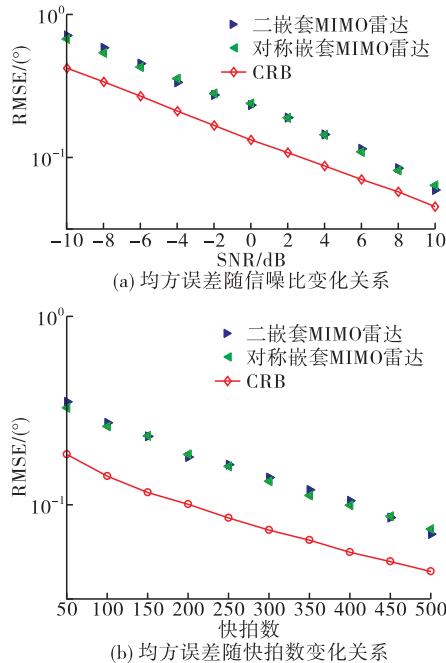


图6 “和差联合阵列”结构下非相干目标估计性能对比

图6(a)为DOA估计误差随信噪比的变化关系图,其中快拍数为500。图6(b)为DOA估计误差随快拍数的变化关系图,其中SNR=10 dB。结合图6和表3可以看出,对称嵌套MIMO雷达和二阶嵌套MIMO雷达在“和差联合阵列”结构下连续的虚拟阵元和总阵元数均相同。因此,两者估计性能接近。

5.4.2 全相干目标DOA估计均方误差

图7给出了“和联合阵列”结构下不同阵列结构的均方误差对比图。图7(a)为DOA估计误差随信噪比的变化关系图,其中快拍数为500。图7(b)为DOA估计误差随快拍数的变化关系图,其中SNR=10 dB。结合图7和表3可以看出,对称嵌套MIMO雷达可利用“和联合阵列”得到更多连续的虚拟阵元和总阵元数,因此,其估计性能更佳。

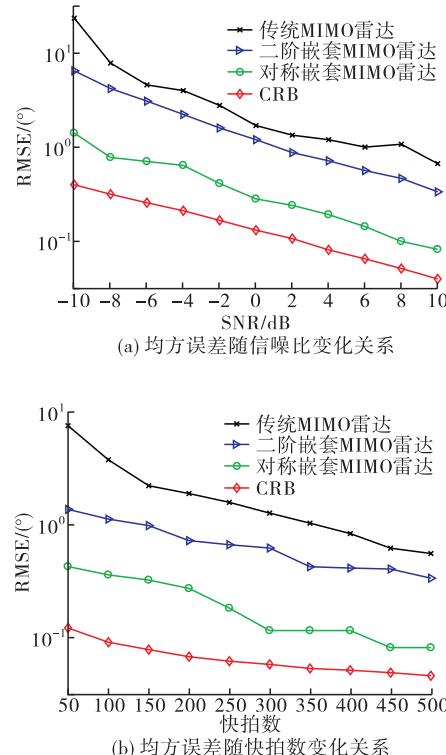


图7 “和联合阵列”结构下全相干目标估计性能对比

5.5 角度分辨率

以“和联合阵列”结构下全相干目标的角度分辨率为为例。假设2个全相干邻近目标 3° 和 6° ,信噪比SNR=10 dB,快拍数为500,搜索范围为 $[0^\circ, 10^\circ]$,步长为 0.1° ,黑色点画线表示真实角度方向。由图8可知,传统MIMO雷达无法分辨上述两个目标,而二阶嵌套MIMO雷达和对称嵌套MIMO雷达可以分辨,且对称嵌套MIMO雷达测向精度更高,谱峰更尖锐。

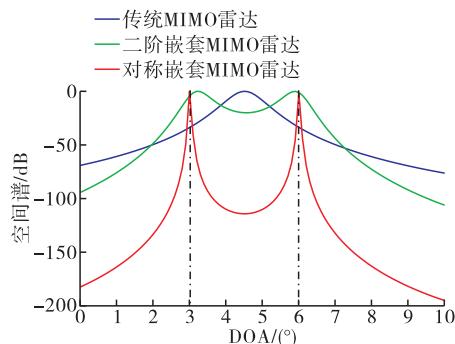


图8 “和联合阵列”结构下邻近全相干目标空间谱

6 结语

本文将阵列的“差联合”阵列结构变成了对称“和联合”阵列结构,提升了自由度性能、抑制了接收阵元互耦,并将其应用于全相干和非相干目标 DOA 估计,提升了目标估计个数和角度估计性能;针对传统算法通常采取删除嵌套阵列的重复虚拟阵元进行 DOA 估计时存在数据丢失问题,算法向量化协方差矩阵,对“和差联合阵列”形成的虚拟阵元进行冗余平均处理后重构 Toeplitz 矩阵,充分利用了所有的扩展虚拟阵元,结合 MUSIC 算法实现了欠定条件下目标 DOA 估计。仿真实验表明本文所提阵列结构和算法提高了多目标角度估计性能和精度。

参考文献

- [1] FISHIER E, HAIMOVICH A, BLUM R S, et al. MIMO Radar: An Idea Whose Time Has Come[C]// In Proceedings of the IEEE Radar Conference. PA, USA: IEEE, 2004:71-78.
- [2] HUANG Y, LIAO G, LI J, et al. Sum and Difference Coarray Based MIMO Radar Array Optimization with Its Application for DOA Estimation[J]. *Multidimensional System Signal Processing*, 2017, 28(4): 1183-1202.
- [3] YANG H, CHUN J. An Improved Algebraic Solution for Moving Target Localization in Non-Coherent MIMO Radar Systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(1): 258-270.
- [4] JIU B, LIU H, WANG X, et al. Knowledge-Based Spatial-Temporal Hierarchical MIMO Radar Waveform Design Method for Target Detection in Heterogeneous Clutter Zone[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(3): 543-554.
- [5] KHAWAR A, ABDELHADIA, CLANCY C. Target Detection Performance of Spectrum Sharing MIMO Radars[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2015, 15(9): 4928-4940.
- [6] ROSHANZAMIR A, BASTANI M. Multipath Effect on False Peaks in Covariance Based MIMO Radar Beam-Pattern Design [C]//14th International Radar Symposium, 2013: 970-975.
- [7] JIANG H, ZHANG J, WONG K M. Joint DOD and DOA Estimation for Bistatic MIMO Radar in Unknown Correlated Noise[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2015, 4(11): 5113-5125.
- [8] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested Arrays: A Novel Approach to Array Processing with Enhanced Degrees of Freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167-4181.
- [9] LIU C, VAIDYANATHAN P. Super Nested Arrays: Linear Sparse Arrays with Reduced Mutual Coupling-Part I: Fundamentals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64 (15): 3997-4012.
- [10] YANG M, SUN L, YUAN X, et al. Improved Nested Array with Hole-Free DCA and More Degrees of Freedom[J]. *Electronics Letters*, 2016, 52 (25): 2068-2070.
- [11] YANG M, SUN L, YUAN X, et al. A New Nested MIMO Array with Increased Degrees of Freedom and Hole-Free Difference Coarray[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(1):40-44.
- [12] 刘巧鸽,王布宏,李夏,等.一种优化嵌套 MIMO 的无孔差合阵列设计[J].空军工程大学学报(自然科学版),2019,20(2):35-41.
- [13] 汤亚鸽,杨明,金强.一种高自由度低复杂度的增强嵌套阵设计方法[J].科技创新与应用,2019 (24): 101-102.
- [14] 谢鑫,李国林,刘华文.采用单次快拍数据实现相干信号 DOA 估计[J].电子与信息学报,2010, 32(3):604-608.
- [15] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLSKY A. Asparse Signal Reconstruction Perspective for Source Localization with Sensor Arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010-3022.
- [16] WANG M, NEHORAI A. MUSIC, and the Cramér-Rao Bound[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(4): 933-946.
- [17] LIU J, ZHANG Y, LU Y, et al. Augmented Nested Arrays with Enhanced DOF and Reduced Mutual Coupling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(21): 5549-5553.

(编辑:徐敏)