

基于变分贝叶斯估计方法的双尺度自适应 Kalman 滤波

吴俊峰¹, 徐 嵩²

(1. 西安理工大学, 西安, 710048; 2. 95910 部队, 甘肃酒泉, 735018)

摘要 针对 Kalman 滤波在对敌目标估计应用中遇到的量测和过程噪声均未知且时变的情况, 提出了一种利用变分贝叶斯估计的双尺度自适应滤波方法。解决了 2 个关键问题: 一是针对量测和过程噪声协方差的共轭后验分布提出了相对转移概率指标, 设计了启发式的自适应噪声估计窗口, 实现了稳态精度和时变响应性能的综合提升, 能适应敌方目标机动性高且统计特性变化快的特点; 二是设计了在不同时间尺度上估计过程噪声和量测噪声的协方差方法, 解决了在同一时间尺度上使协方差估计值发生严重偏差且增大滤波误差的问题。仿真表明, 所提方法能快速跟踪目标状态噪声统计特性的变化并保证估计精度。

关键词 自适应 Kalman 滤波; 变分贝叶斯方法; 双尺度估计; 启发式算法

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2019.02.012

中图分类号 TN967.2 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2019)02-0079-07

Double Scale Adaptive Kalman Filter Based on Variational Bayesian Estimation Approach

WU Junfeng¹, XU Song²

(1. Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Unit 95910, Jiuquan 735018, Gansu, China)

Abstract: In consideration of the problem in applying Kalman filter when time varying noise covariance matrix of measurement and process are neither known, a new adaptive filter was purposed by Variational Bayesian(VB) approach. This filter overcame two key problems as following: first, relative transfer probability was proposed as realizing to promote the performances of steady state precision and dynamic respond simultaneously, by designing the heuristic adaptive window for noise estimation, according to the conjugate posterior distribution of measurement and process noise; second, the serious offset of the estimation value of noise covariance matrix under single time scale was notable reduced by designing the approach which estimated the covariance matrix under double time scales. The simulations proved that this method could track the noise statistics feature quickly without losing estimation precision.

Key words: adaptive Kalman filter; variational Bayesian approach; double scale estimation; heuristic algorithm

卡尔曼滤波(Kalman Filter, KF)的主要缺陷在于其必须预先已知系统过程噪声和量测噪声的统计

收稿日期: 2018-05-07

基金项目: 国家自然科学基金(61772416); 陕西省自然科学基金(2016JQ6065); 陕西省教育厅重点实验室项目(17JS098); 陕西省教育厅基础研究计划(15JK1535)

作者简介: 吴俊峰(1980—), 女, 山西大同人, 讲师, 主要从事图像重建与去噪研究。E-mail: wujf@xaut.edu.cn

引用格式: 吴俊峰, 徐嵩. 基于变分贝叶斯估计方法的双尺度自适应 Kalman 滤波[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2019, 20(2): 79-85. WU Junfeng, XU Song. Double Scale Adaptive Kalman Filter Based on Variational Bayesian Estimation Approach[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2019, 20(2): 79-85.

特性(但实际应用中,尤其是针对非合作的敌方目标,量测和系统受扰条件变换导致其难以获取),这将严重影响滤波精度^[1-2]。传统的自适应滤波算法^[3]和基于状态扩展的滤波方法^[4]可以实时估计噪声的均值和方差,克服了噪声统计特性不确定导致的滤波缺陷,但对于噪声尤其是时变噪声的估计精度较低^[5-6]。为此,研究人员发展了基于极大后验^[7]、极大似然准则^[8]和变分贝叶斯估计(Variational Bayesian, VB)^[9-10]的噪声估计算法。然而,针对难以获取准确情报信息的地方目标而言,当过程噪声和量测噪声的统计特性均未知时,上述方法都会产生对统计特性估计的严重偏差,进而扩大对系统状态的估计误差。同时,文献[9]引入的量测噪声协方差必须假设为对角矩阵,也极大地限制了其应用范围^[11-13]。

另一方面,文献[7~9]中3类方法均通过引入渐消记忆因子估计时变噪声统计特性,然而,噪声统计特性的稳态估计精度与跟踪速度之间存在固有矛盾:若增加记忆保持,则当提高稳态估计精度时,跟踪速度将产生滞后;若降低记忆保持,则当提高跟踪速度时,稳态估计精度又将降低。

交互多模型(IMM)方法从理论上既解决了量测噪声和过程噪声统计特性均未知时的自适应滤波问题,又解决了噪声统计特性稳态估计精度与跟踪速度之间的矛盾问题^[14]。然而,对于多维量测问题,IMM方法存在模型难以设置以及模型数随系统状态维数呈指数增长的爆炸问题,因而无法满足实际的自适应滤波器设计和实时性运行需求。

鉴于以上分析,本文提出了基于VB的双尺度自适应Kalman滤波方法。具体方案为:①在2个不同的时间尺度上分别估计量测噪声和过程噪声的统计特性,解决单个尺度下协方差矩阵估计的偏差问题;②通过引入逆Wishart分布(IW)^[15]替换文献[9]中的逆Gamma分布,取消噪声协方差矩阵必须为对角矩阵的限制;③利用VB方法得到量测噪声特性的分布,并设计相对转移概率指标,解决稳态估计精度与跟踪速度之间的矛盾且保证实时性。

1 系统噪声的变分贝叶斯估计

1.1 系统和量测模型:

考虑离散线性模型为^[9]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_k \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{q}_k \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}_k \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{q}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$, $\mathbf{r}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$ 分别为系统过程和量测噪声; $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ 为 k 时刻系统的 n_x 维状态

和 n_y 维量测; \mathbf{Q}_k , \mathbf{R}_k 分别为已知、未知的系统过程噪声协方差矩阵,在此不要求矩阵 \mathbf{R}_k 必须为对角矩阵,旨在扩大其应用范围。对量测和过程噪声的自适应滤波过程可表示为:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \check{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \check{p}(\mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (2)$$

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \check{p}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k}) \check{p}(\mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \quad (3)$$

1.2 量测噪声的VB估计方法

由于量测噪声与系统状态相互独立,故式(2)中等号成立,对其变换可得:

$$p(\mathbf{x}, k \mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{x}_{k-1}) \propto p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) p(\mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (4)$$

$$p(\mathbf{R}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) = C_{\text{Wishart}}(\Psi_{k-1}, s_{k-1}) |\mathbf{R}_{k-1}|^{-\frac{1}{2}(s_{k-1} + n_y + 1)} \exp(\text{ty}(\Psi_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{-1})/2) \quad (5)$$

式中: $C_{\text{Wishart}}(\Psi_{k-1}, s_{k-1}) = |\Psi_{k-1}|^{-\frac{1}{2}s_{k-1}} / \Gamma_{n_y}(\frac{1}{2} s_{k-1})$

为Wishart分布系数; $\Gamma_{n_y}(t) = \pi^{n_y(n_y-1)/2} \prod_{i=1}^{n_y} \Gamma[t - (i-1)/2]$ 为多元Gamma函数。依据Kalman滤波可知:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = C_{\text{Normal}}(n_x) |P_k^-|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k^-)(\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_k^-)^T (P_k^-)^{-1}]} \quad (6)$$

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) = C_{\text{Normal}}(\mathbf{R}_k, n_y) |\mathbf{R}_k|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{y}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{R}_k^{-1})]} \quad (7)$$

式中:正态分布系数 $C_{\text{Normal}}(P, n) = (2\pi)^{-n/2} P^{-n/2}$ 。

当 \mathbf{R}_k 代表常值噪声统计特性时,分布密度 $p(\mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ 与 $p(\mathbf{R}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$ 相同,故有:

$$p(\mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \propto \exp(E_{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})}[\ln(p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k}))]) = -\frac{1}{2}((s_{k-1} + 1) + n_y + 1) \ln |\mathbf{R}_k| - \frac{1}{2} \text{tr}[(\Psi_{k-1} + \Psi_k) \mathbf{R}_k^{-1}] \quad (8)$$

$$\Psi_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \quad (9)$$

将 $\Psi_{R,k}$ 简记为 $[\Psi_{R,k}] = \text{CalcCovElemForR}(\mathbf{y}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{H}_{k+1})$,因此, $p(\mathbf{R}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 为Wishart概率密度。

$$\begin{cases} IW(\mathbf{R}_k; \Psi_k, s_k) \\ \hat{\mathbf{R}}_k = \Psi_k / s_k \end{cases}, \begin{cases} \Psi_k = \Psi_{k-1} + \Psi_k \\ s_k = s_{k-1} + 1 \end{cases} \quad (10)$$

由文献[9]可知 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 为:

$$N(\mathbf{x}_k; \mathbf{m}_k, P_k) \begin{cases} \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{m}_k^-) \\ \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{m}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{m}_{k-1}$; $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k$,将由式(11)的状态递推估计简记为:

$$\begin{cases} [\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-] = \text{KF-Predict}(\mathbf{A}_k, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_{\text{tr}}) \\ [\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+1}] = \text{KF-Update}(\mathbf{H}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{P}_{k+1}^-, \mathbf{R}_{\text{tr}}) \end{cases} \quad (12)$$

当 \mathbf{R}_k 代表时变噪声统计特性时,可引入渐消因

子($0 < \rho \leq 1$),将式(10)右侧变换为:

$$\Psi_k = \rho \Psi_{k-1} + \Psi_k; s_k = \rho s_{k-1} + 1 \quad (13)$$

注 1:由式(11)和(13)可得到文献[9]中滤波器的扩展形式,取消了矩阵 \mathbf{R}_k 必须为对角阵的限制性假设,扩展了应用范围。

1.3 过程噪声的 VB 估计方法

1.3.1 基于单步滤波的过程噪声估计

采用式(14)表示过程噪声特性:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &\propto p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k) p(\mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) & \end{aligned} \quad (14)$$

已知 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 和 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$, 可得:

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Q}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (15)$$

同时构建近似函数:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &\rightarrow \check{p}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \\ \check{p}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &= \check{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \check{p}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ \check{p}(\mathbf{Q}_k | \mathbf{y}_{1:k}) & \end{aligned} \quad (16)$$

则采用 VB 方法可推导出 \mathbf{Q}_k 的估计值,推导过程与 1.2 节类似,将 $\Psi_{\mathbf{Q}_k}$ 的求解过程简记为:

$$[\Psi_{\mathbf{Q}}] =$$

$$\text{CalcCovElemForQ}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{P}_k, \mathbf{A}_k) \quad (17)$$

1.3.2 基于多步滤波的过程噪声估计

为避免 VB 迭代估计中的概率密度函数 $\check{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ 和 $\check{p}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$ 引入误差,本节采用间隔多步滤波结果来求得 \mathbf{Q}_{kT_c} 的估计值。

$$\check{p}(\mathbf{x}_{kT_c}, \mathbf{x}_{(k-1)T_c}, \mathbf{Q}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) = \check{p}(\mathbf{x}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) \check{p}(\mathbf{x}_{(k-1)T_c} | \mathbf{y}_{(k-1)T_c}) \check{p}(\mathbf{Q}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) \quad (18)$$

当对 $\mathbf{x}_{kT_c}, \mathbf{x}_{(k-1)T_c}, \mathbf{Q}_{kT_c}$ 进行迭代估计时,由于 \mathbf{Q}_{kT_c} 并不是实际的准确值,若将 $\check{p}(\mathbf{x}_{(k-1)T_c} | \mathbf{y}_{(k-1)T_c})$ 改为 $\check{p}(\mathbf{x}_{(k-1)T_c} | \mathbf{y}_{kT_c})$,则平滑过程将引入更大误差。

设 $\mathbf{Q}_{T_c(k)} = \text{Cov}[\mathbf{x}_{kT_c} - \prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \mathbf{x}_{(k-1)T_c}]$, 因为

$$\mathbf{x}_{kT_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \mathbf{x}_{(k-1)T_c} =$$

$$\sum_{i_s=0}^{T_c-1} \left[\left(\prod_{j_s=0}^{i_s} \mathbf{A}_{kT_c-j_s} \right) (\mathbf{x}_{k-i_s} - \mathbf{A}_{kT_c-i_s-1} \mathbf{x}_{kT_c-i_s-1}) \right] \quad (19)$$

由式(1)可知:

$$\begin{cases} E[(\mathbf{x}_{kT_c-i_{s1}} - \mathbf{A}_{kT_c-i_{s1}-1} \mathbf{x}_{kT_c-i_{s1}-1}) \\ (\mathbf{x}_{kT_c-i_{s2}} - \mathbf{A}_{kT_c-i_{s2}-1} \mathbf{x}_{kT_c-i_{s2}-1})^T] = \mathbf{O} \\ \forall i_{s1} \neq i_{s2}; (i_{s1}, i_{s2}) \in \{0, 1, 2, \dots, T_c-1\} \end{cases} \quad (20)$$

所以:

$$\mathbf{Q}_{T_c(k)} =$$

$$\sum_{i_s=0}^{T_c-1} \text{Cov} \left[\left(\prod_{j_s=0}^{i_s} \mathbf{A}_{kT_c-j_s} \right) (\mathbf{x}_{kT_c-i_s} - \mathbf{A}_{kT_c-i_s-1} \mathbf{x}_{kT_c-i_s-1}) \right] =$$

$$\sum_{i_s=0}^{T_c-1} \left(\prod_{j_s=0}^{i_s} \mathbf{A}_{kT_c-j_s} \right) \mathbf{Q}_{kT_c-i_s+1} \left(\prod_{j_s=0}^{i_s} \mathbf{A}_{kT_c-j_s} \right)^T。$$

而对 $p(\mathbf{x}_{kT_c}, \mathbf{x}_{(k-1)T_c}, \mathbf{Q}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:kT_c})$ 变换可得:

$$\begin{aligned} &p(\mathbf{x}_{kT_c}, \mathbf{x}_{(k-1)T_c}, \mathbf{Q}_{T_c(k)} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) \\ &\propto p(\mathbf{x}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:(k-1)T_c}, \mathbf{x}_{(k-1)T_c}, \mathbf{Q}_{T_c(k)}) p(\mathbf{Q}_{T_c(k)} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \cdot \\ &p(\mathbf{x}_{(k-1)T_c} | \mathbf{y}_{1:(k-1)T_c}) p(\mathbf{y}_{(k-1)T_c+1:kT_c} | \mathbf{x}_{kT_c}, \mathbf{x}_{(k-1)T_c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{故有:} \\ &p(\mathbf{Q}_{T_c(k)} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) \propto \\ &\exp \left(E_{\check{p}(\mathbf{x}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) \check{p}(\mathbf{x}_{(k-1)T_c} | \mathbf{y}_{1:(k-1)T_c})} [\ln (p(\mathbf{x}_{kT_c}, \right. \\ &\left. \mathbf{x}_{(k-1)T_c}, \mathbf{Q}_{T_c(k)} | \mathbf{y}_{1:kT_c}))] = \right. \\ &-\frac{1}{2} ((s_{\mathbf{Q}, T_c(k)} + 1) + n_x + 1) \ln |\mathbf{Q}_{T_c(k)}| - \\ &\left. \frac{1}{2} \text{tr}[(\Psi_{\mathbf{Q}, T_c(k)} + \Psi_{\mathbf{Q}, kT_c}) \mathbf{Q}_{T_c(k)}^{-1}] + C \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\text{式中: } \Psi_{\mathbf{Q}, kT_c} = E_{\check{p}(\mathbf{x}_{kT_c} | \mathbf{y}_{1:kT_c}) \check{p}(\mathbf{x}_{(k-1)T_c} | \mathbf{y}_{1:(k-1)T_c})} [(\mathbf{x}_{kT_c} - \\ &\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \mathbf{x}_{(k-1)T_c}) (\mathbf{x}_{kT_c} - \prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \mathbf{x}_{(k-1)T_c})^T]。 \end{aligned}$$

因为:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{x}_{kT_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \mathbf{x}_{(k-1)T_c}] + \\ &[\left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \mathbf{x}_{(k-1)T_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)T_c}] = \\ &(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{kT_c}) + [\hat{\mathbf{x}}_{kT_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)T_c}], \end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{Q}, kT_c} &= (\hat{\mathbf{x}}_{kT_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)T_c}) \\ &(\hat{\mathbf{x}}_{kT_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)T_c})^T + \mathbf{P}_{kT_c} - \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right) \\ &\mathbf{P}_{(k-1)T_c} \left(\prod_{i_d=0}^{T_c} \mathbf{A}_{kT_c-i_d} \right)^T \end{aligned} \quad (22)$$

将求解 $\Psi_{\mathbf{Q}, kT_c}$ 的过程简记为:

$$[\Psi_{\mathbf{Q}, kT_c}] = \text{CalcCovElemForQ}(\hat{\mathbf{x}}_{kT_c}, \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)T_c}, \mathbf{P}_{kT_c}, \mathbf{P}_{(k-1)T_c}, \mathbf{A}_{kT_c}, \dots, \mathbf{A}_{(k-1)T_c}) \quad (23)$$

2 自适应时变系统噪声估计

对于 1.2 节和 1.3 节中带有渐消记忆因子的噪声估计器,当系统量测噪声时变,尤其是突变时,通过调整记忆因子难以兼顾对噪声或扰动统计特性的时变响应和稳态精度。在此利用 1.2 节获得的噪声协方差矩阵分布(式(10)),设计可综合提升 2 个性能的估计方法。

2.1 噪声统计特性差异的估计方法

设现阶段噪声统计特性分布为 $p(M_{\text{Cov}, \text{Cur}} | Y_{\text{Cur}})$, 前阶段分布为 $p(M_{\text{Cov}, \text{Pre}} | Y_{\text{Pre}})$ 。引入两者相等概率:

$$p(M_{\text{Cov}, \text{Cur}}) = M_{\text{Cov}, \text{Pre}} | Y_{\text{Cur}}, Y_{\text{Pre}} =$$

$$\int_{\Omega} p(M_{Cov} | Y_{Cur}) p(M_{Cov} | Y_{Pre}) dM_{Cov} \quad (24)$$

当噪声特性点估计值相等时,式(24)表示两者相等的概率最大,即:

$$\max(p(M_{Cov, Cur} = M_{Cov, Pre} | Y_{Cur}, Y_{Pre})) \Rightarrow E_{p(M_{Cov, Cur} | Y_{Cur})} [M_{Cov, Cur}] = E_{p(M_{Cov, Pre} | Y_{Pre})} [M_{Cov, Pre}] \quad (25)$$

定义相对转移比例:

$$K_{hold} = \frac{p(M_{Cov, Cur} = M_{Cov, Pre} | Y_{Cur}, Y_{Pre})}{\max(p(M_{Cov, Cur} = M_{Cov, Pre} | Y_{Cur}, Y_{Pre}))} \quad (26)$$

将1.2节和1.3节得到的 R_k 、 Q_{kT_c} 或 $Q_{T_c(k)}$ 的IW分布统一表示为 M_{Cov} 的IW分布,则可得到齐次相对概率:

$$K_{Rel}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) = \frac{f_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre})}{\max_{\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}} f_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre})} \quad (27)$$

式中: $f_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) = \frac{|\Psi_{Cur}|^{s_{Cur}/2} |\Psi_{Pre}|^{s_{Pre}/2}}{|\Psi_{Cur} + \Psi_{Pre}|^{(s_{Cur} + s_{Pre} + n + 1)/2}}$ 。

对当前数据, $\Psi_{Cur} + \Psi_{Pre} = \Psi_{Tot}$ 是确定的,因而:

$$f_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) = \frac{1}{|\Psi_{Tot}|^{(n+1)/2}} \frac{|\Psi_{Cur}|^{s_{Cur}/2} |\Psi_{Pre}|^{s_{Pre}/2}}{|\Psi_{Cur} + \Psi_{Pre}|^{(s_{Cur} + s_{Pre})/2}} \quad (28)$$

记 $\bar{f}_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) = f_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) / |\Psi_{Tot}|^{(n+1)/2}$,则由Minkowski不等式可得:

$$\bar{f}_{P_{Rel}}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) \leq \frac{(|\Psi_{Cur}|^{1/n})^{m_{Cur}/2} (|\Psi_{Pre}|^{1/n})^{m_{Pre}/2}}{(|\Psi_{Cur}|^{1/n} + |\Psi_{Pre}|^{1/n})^{n(s_{Cur} + s_{Pre})/2}} \leq \frac{(s_{Cur})^{m_{Cur}/2} (s_{Pre})^{m_{Pre}/2}}{(s_{Cur} + s_{Pre})^{n(s_{Cur} + s_{Pre})/2}} \quad (29)$$

式(29)中前后2个不等式等号成立的条件为:

$$\Psi_{Cur} = \lambda \Psi_{Pre}; s_{Pre} |\Psi_{Cur}|^{1/n} = s_{Cur} |\Psi_{Pre}|^{1/n} \quad (30)$$

则将式(30)代入式(27)可得,

$$\bar{K}_{Rel}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) = \frac{|\Psi_{Cur}|^{s_{Cur}/2} |\Psi_{Pre}|^{s_{Pre}/2}}{|\Psi_{Cur} + \Psi_{Pre}|^{(s_{Cur} + s_{Pre})/2}} \frac{(s_{Cur})^{m_{Cur}/2} (s_{Pre})^{m_{Pre}/2}}{(s_{Cur} + s_{Pre})^{n(s_{Cur} + s_{Pre})/2}} \quad (31)$$

进而得到与量测维数无关的相对概率指标。

$$K_{Rel}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}) = [\bar{K}_{Rel}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre})]^{1/n} \quad (32)$$

将计算相对概率的过程记为:

$$[K_{Rel}] = \text{CalcRelProb}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre}, s_{Cur}, s_{Pre}) \quad (33)$$

2.2 时变量测/过程噪声特性估计方法

利用2.1节中的差异估计 \bar{K}_{Rel} 可以在线调整前期测量数据(Ψ_{Pre}, s_{Pre}),从而综合提升噪声特性的稳态估计和动态响应特性。

2.2.1 记录协方差计算的数据结构

$$M, DS \begin{cases} DS_{Cur} \begin{cases} Arr_{Cur} = \Psi_{Cur}, (n_{Cur} \times 1) \\ i_C, \Psi_{Cur}, s_{Cur}, b_{C, Full} \end{cases} \\ DS_{Pre} \begin{cases} Arr_{Pre} = \Psi_{Pre}, (n_{Pre} \times 1) \\ Sum_{Pre} = \Psi_{Pre}, s_{Pre} \\ i_P, \tau_P, \Psi_{Pre}, s_{Pre}, b_{P, Full} \end{cases} \end{cases} \quad (34)$$

式(34)中 $Arr_{Cur/Pre}$ 将式(23)得到的 Ψ_R 和 Ψ_Q

分为 DS_{Cur} 和 DS_{Pre} 2个阶段存储。 DS_{Cur} 将最近的 n_{Cur} 个数据记录在 Arr_{Cur} 中,并按照衰减因子 ρ 计算对应的IW分布参数 Ψ_{Cur}, s_{Cur} 。 i_C 为当前 $\Psi_{R/Q}$ 插入 Ψ_{Cur} 中的位置。 DS_{Pre} 存储了 n_{Cur} 个数据之前的 n_{Pre} 个 $\Psi_{R/Q}$ 数据到 Arr_{Pre} 中。同时依据衰减因子 ρ 将 $1 \sim n_{Pre}$ 个 $\Psi_{R/Q}$ 数据对应的IW分布参数 Ψ 记录在 Sum_{Pre} 中,并能依据需要的窗口长度 ω_P ,求得IW分布参数 Ψ_{Pre}, s_{Pre} 。 i_P 为从 DS_{Cur} 中推出的 $\Psi_{R/Q}$ 插入 Ψ_{Pre} 中的位置。 $b_{C/P, Full}$ 表示 $DS_{Cur/Pre}$ 。式(34)的初始结构为式(35),将协方差存储管理简记为 $AdCov \# ElemForM(\Psi_M), (M=Q, R)$ 。

$$M, DS \begin{cases} DS_{Cur} \begin{cases} i_C = s_{Cur} = 0, \Psi_{Cur} = 0 \\ b_{C, Full} = false \end{cases} \\ DS_{Pre} \begin{cases} i_P = s_{Pre} = 0, \Psi_{Pre} = 0, \\ \Psi_{Pre} = 0, b_{P, Full} = false \end{cases} \end{cases} \quad (35)$$

该数据结构一方面便于替换 DS_{Cur} 中的元素,利于设计迭代估计算法;另一方面便于提取 DS_{Pre} 中任意一段数据的和,利于设计时变自适应算法。替换 DS_{Cur} 中元素的算法为:

$$\begin{cases} i_{rf} = \text{mod}(i_C - t_d, n_{Cur}) \\ \Psi_{Tmp} = \Psi_{Cur}(i_{rf}); \Psi_{Cur}(i_{rf}) = \Psi_{New} \\ \Psi_{Cur} = \Psi_{Cur} + \rho^{i-1}(\Psi_{New} - \Psi_{Tmp}) \end{cases} \quad (36)$$

简记为 $RefreshCovElemForM(t_D, \Psi_{New}), (M=R, Q)$,提取 DS_{Pre} 中任一段数据和的算法为:

$$\begin{cases} i_{TailP} = \text{mod}(i_P - n_{Sec} - 1, n_{Pre}) \\ \Psi_{PreSec} = \Psi_{Pre}(i_P) - \rho^{n_{Sec}} \Psi_{Pre}(i_{TailP}) \\ s_{PreSec} = \rho(1 - \rho^{n_{Sec}}) / (1 - \rho) p_{Cur} \end{cases} \quad (37)$$

式(37)表示从 Ψ_{Pre} 中取最新加入的 n_{Sec} 个元素所构成的IW分布参数($\Psi_{PreSec}, s_{PreSec}$),记为:

$$[\Psi_{PreSec}, s_{PreSec}] = \text{PickCovSecForPreM}(n_{Sec}) \quad (38)$$

2.2.2 滑动窗口的自适应调整

滑动窗口的大小决定了对协方差矩阵估计的精度和响应速度。利用 DS_{Cur} 和 DS_{Pre} 的差异,可以得到估计协方差的数据长度。采用由式(32)得到的 $K_{Rel}(\Psi_{Cur}, \Psi_{Pre})$,可以较小的计算代价调整窗口大小。窗口大小调整需要考虑噪声统计特性为渐变或突变两种情况,对于突变则须设计截断算法,以进一步减少估计偏差。如图1,通过引入全局变量 n_{SupL} 来实现截断。

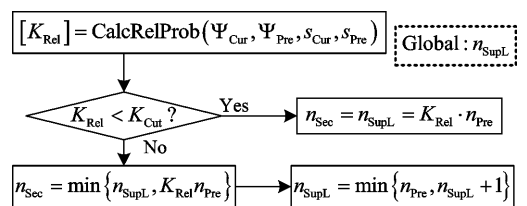


图1 滑动窗口的自适应调整

图中: K_{cut} 为判断截断的临界相对概率, CalcRelProb 函数如式(33),将自适应调整过程记为:

$$[n_{\text{Sec}}] = \text{AdaptiveCovWinM}(\Psi_{\text{Cur}}, \Psi_{\text{Pre}}, s_{\text{Cur}}, s_{\text{Pre}}),$$

$$(M=R, Q) \quad (39)$$

式中: n_{PreSec} 表示 Ds_{Pre} 中所取数据段的长度。通过式(38)得到相应的协方差 IW 分布参数 $\Psi_{\text{PreSec}}, s_{\text{PreSec}}$, 从而得到估计当前协方差矩阵的方法见式(40), 并记为式(41)。

$$\hat{M} = (\Psi_{\text{PreSec}} + \Psi_{\text{Cur}}) / (s_{\text{PreSec}} + s_{\text{Cur}}) \quad (40)$$

$$[\hat{M}] = \text{EstimateCovM}(\Psi_{\text{PreSec}}, \Psi_{\text{Cur}}, s_{\text{PreSec}}, s_{\text{Cur}}) \quad (41)$$

注2: 本文所提估计方法与 IMM 方法的最大区别在于: IMM 方法采用多模型组合权重调整方式, 间接辨识时变的协方差统计特性。而本文方法则采用直接指标判断方法, 来解决时变噪声统计特性辨识时的窗口调整方法。

3 仿真结果与分析

通过对比仿真验证算法的正确性和有效性。限于篇幅, 本节主要对比噪声特性估计窗口固定时的单尺度估计算法与窗口自适应时的双尺度估计算法。采用敌方目标机动中较常见的飞行器姿态旋转模型验证本文算法估计量测噪声协方差时的性能。

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega\Delta t) & \sin(\omega\Delta t) \\ 0 & -\sin(\omega\Delta t) & \cos(\omega\Delta t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (42)$$

为验证当量测噪声和过程噪声的统计特性发生交替变换时的辨识效果, 设定总采样数 $n_T = 40\,000$, 采样时间 $\Delta t = 0.05\text{ s}$, $\omega = 0.1\text{ rad}$ 。对双尺度估计设定 $T_c = 8, T_d = 6, N_{\text{itr}} = 6, n_{\text{SecR}} = 1\,000, n_{\text{SecQ}} = 200$, 单尺度估计设定 $T_c = 1, T_d = 1, N_{\text{itr}} = 6, n_{\text{SecR}} = n_{\text{SecQ}} = 1\,000$ 。统计特性的交替变换方式为:

$$Q_k =$$

$$\begin{cases} 7 \times 10^{-4} Q_b, k \in \{[1, n_T/4] \cap (n_T/2, 3n_T/4)\} \cap N \\ 1 \times 10^{-1} Q_b, k \in \{[n_T/4, n_T/2] \cup (3n_T/4, n_T)\} \cap T \end{cases}$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

3.1 噪声统计特性估计误差的对比仿真

Q 阵和 R 阵的仿真结果表示其每个元素的动态估计值, 分别对比协方差矩阵的对角和非对角元素。 Q 阵和 R 阵部分元素的估计结果, 见图 3~6。

对于 Q 阵和 R 阵的估计, 当其协方差对角元素的统计特性突变时, 单尺度估计将产生严重偏差, 而双尺度估计可消除偏差。且当采用自适应估计窗口

时, 能在加快响应速度的同时减少估计误差。

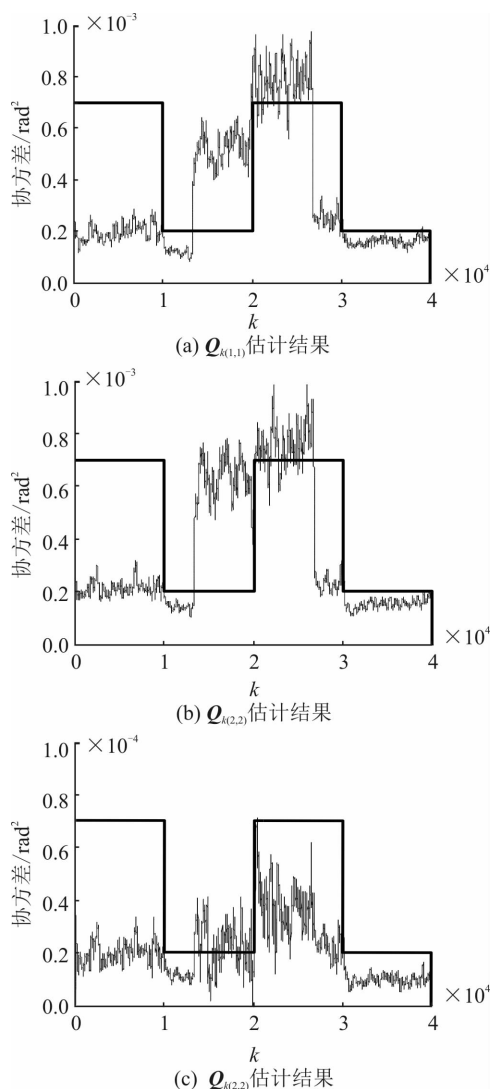
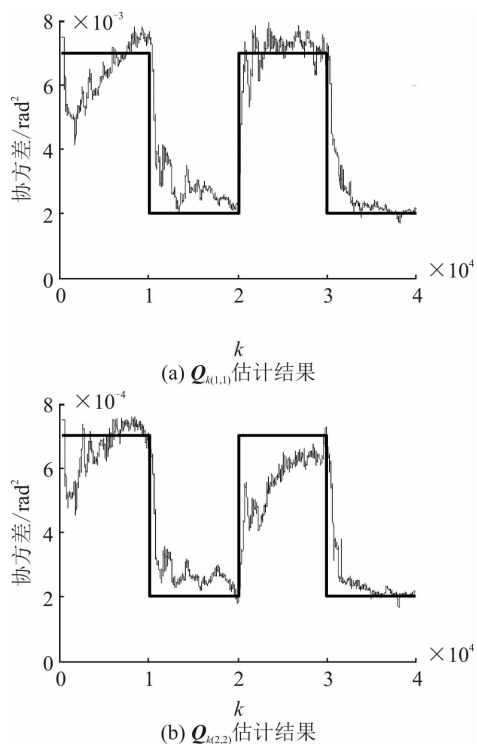
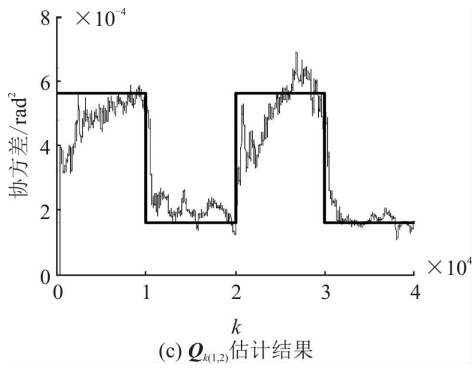
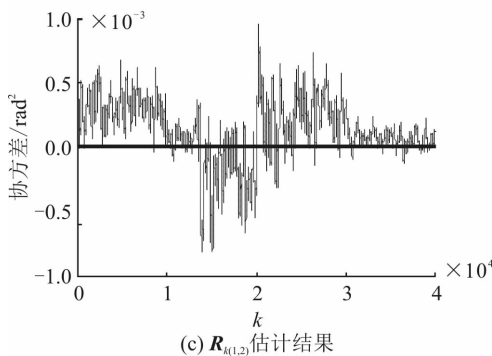
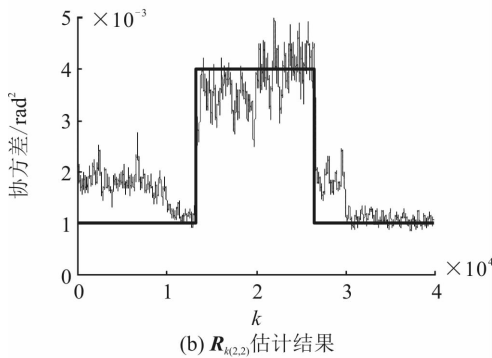
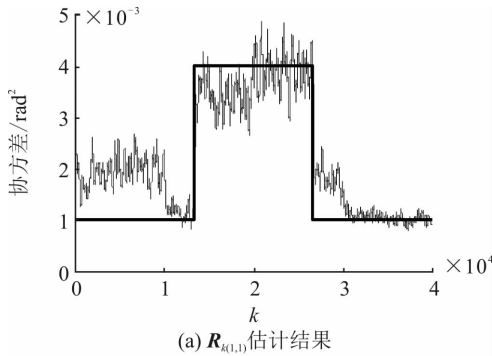
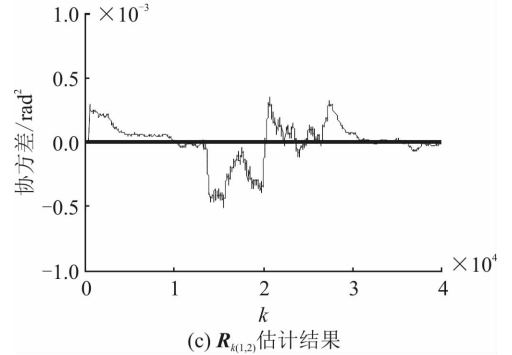
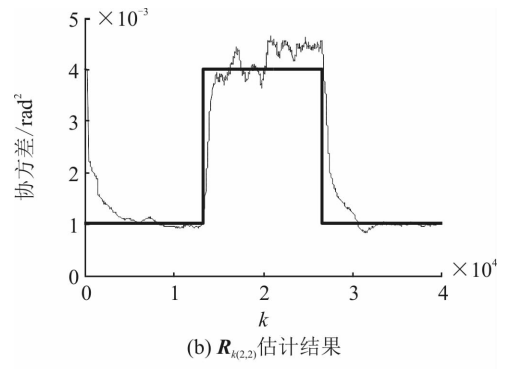
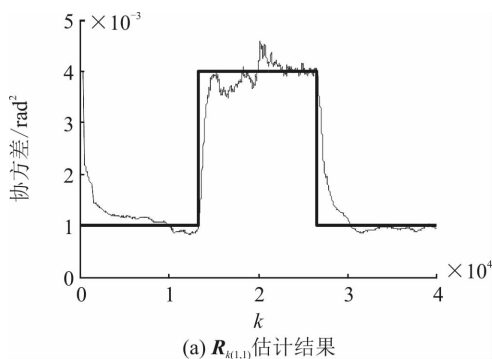


图3 Q 阵部分元素单尺度估计



图4 Q 阵部分元素双尺度自适应估计图5 R 阵部分元素单尺度估计图6 R 阵部分元素双尺度自适应估计

仿真表明,在估计非对角线元素时,当矩阵元素突变时,单尺度估计仍然会有明显偏差,并不因为对应的 $R_{k(1,2)}$ 和 $Q_{k(1,3)}$ 为常值 0 而减弱。对于常值元素,单尺度估计会产生更大的误差,且对 $Q_{k(2,3)}$ 的单尺度估计值同样产生明显偏差。

3.2 系统状态估计误差的对比仿真

记状态偏差为 $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$,为了对比偏差变化,定义偏差累积和为式(44),设 $n_w = 40$,得到 3 种情况下的偏差统计:

$$b_{s_i(j)} = \sum_{i=n_w(s_i-1)+1}^{n_w s_i} |\tilde{x}_{i(j)}|, (j=1,2,3) \quad (44)$$

仿真表明:当 Q 阵、 R 阵估计存在较大偏差时,单尺度的估计偏差较双尺度大。在双尺度估计情况下,自适应窗口对减少估计误差的改进不明显,可用式(45)的累积偏差进行对比:

$$B_j = \sum_{k=1}^{n_s} |\tilde{x}_{k(j)}|, (j=1,2,3) \quad (45)$$

表 1 中, S_A 、 S_B 分别表示单尺度、双尺度自适应估计窗口的系统状态累积偏差, S_R 表示采用准确的噪声协方差矩阵得到的估计偏差。可知,单尺度估计时的系统状态偏差最大,采用自适应估计窗口可进一步提升状态估计的精度,且 S_B 情况的估计偏差更接近于 S_R 情况。

表 1 系统状态估计偏差累积

分类	B_1	B_2	B_3
S_A	876.511 3	876.881 9	896.562 5
S_B	791.832 1	794.177 9	803.418 9
S_R	782.548 9	784.682 4	795.353 2

4 结语

基于变分贝叶斯方法,提出了适用于量测和过程噪声均未知且时变系统的双尺度自适应 Kalman 滤波算法,解决了量测噪声和过程噪声同时估计时协方差矩阵估计值的显著偏差问题,综合提升了噪声估计稳态精度和动态响应。仿真表明,所提算法有效避免了量测噪声和过程噪声统计特性交替变化时的估计偏差,显著降低了系统状态的估计误差,可使状态估计的累计偏差值更加接近于准确噪声统计特性已知时的偏差。本文方法可进一步与非线性滤波器结合,提升现有非线性自适应滤波器对敌方非合作目标等存在未知时变噪声情况的噪声和状态估计性能。

参考文献(References):

- [1] 袁美桂,严玉国,庞春雷,等.改进的自适应 Kalman 滤波在 GPS/SINS 中的应用[J].空军工程大学学报(自然科学版),2015,16(5):65-69.
YUAN M G, YAN Y G, PANG C L, et al. The Application Improved Adaptive Kalman Filter to GPS/SINS[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2015, 16(5): 65-69. (in Chinese)
- [2] 侯西倩,寇英信,李战武,等.高斯和估计 Kalman 滤波在多平台空战对抗评估数据预处理中的应用[J].空军工程大学学报(自然科学版),2015,16(3):25-29.
HOU X Q, KOU Y X, LI Z W, et al. Pre-Processing of Multi-Platform Air Combat Rivalry Evaluation Based on Gaussian Sum Estimate Kalman Filter[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2015, 16(3): 25-29. (in Chinese)
- [3] SAGE A P, HUS G W. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics[C]//Joint Automatic Control Conference. [S.l.]:IEEE, 1969:760-769.
- [4] MAYBECK P. Stochastic Models, Estimation and Control(Volume 2)[M]. New York: Academic Press, 1982:128-135.
- [5] JWO D J, CHO T S. A Practical Note on Evaluating Kalman Filter Performance Optimality and Degradation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 193(2): 482-505.
- [6] JWO D J, WANG S H. Adaptive Fuzzy Strong Tracking Extended Kalman Filtering for GPS Navigation [J]. IEEE Sensors Journal, 2007, 7(5): 778-789.
- [7] 赵琳,王小旭,孙明,等.基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法[J].自动化学报,2010,36(7):1007-1019.
ZHAO L, WANG X X, SUN M, et al. Adaptive UKF Filtering Algorithm Based on Maximum a Posterior Estimation and Exponential Weighting[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(7): 1007-1019. (in Chinese)
- [8] 王璐,李光春,乔相伟,等.基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法[J].自动化学报,2012,38(7):1200-1210.
WANG L, LI G C, QIAO X W, et al. An Adaptive UKF Algorithm Based on Maximum Likelihood Principle and Expectation Maximization Algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(7): 1200-1210. (in Chinese)
- [9] SÄRKKÄ S, NUMMENMAA A. Recursive Noise Adaptive Kalman Filtering by Variational Bayesian Approximations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(3): 596-600.
- [10] SMIDL V, QUINN A. The Variational Bayes Method in Signal Processing[M]. New York: Springer, 2006.
- [11] SONG E, ZHU Y, ZHOU J, et al. Optimal Kalman Filtering Fusion with Cross-Correlated Sensor Noises [J]. Automatica, 2007, 43(8): 1450-1456.
- [12] SUN J L, ZHOU J, GU X K. Variational Bayesian Two-Stage Kalman Filter for Systems with Unknown Inputs [J]. Procedia Engineering, 2012, 29: 2265-2273.
- [13] GAO X, CHEN J, TAO D, et al. Multi-Sensor Centralized Fusion without Measurement Noise Covariance by Variational Bayesian Approximation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(1), 718-727.
- [14] JOHNSTON L A, KRISHNAMURTHY V. An Improvement to the Interacting Multiple Model (IMM) Algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(12): 2909-2923.
- [15] ANDERSON T W. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis[M]. 3 ed. Stanford: Wiley Interscience, 2004:251-285.

(编辑:徐楠楠)