第 18 卷第 2 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 18 No. 2
2017 年 4 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Apr. 2017

短码长二元循环码的局部修复度

饶　驿，李瑞虎，付　强，杨瑞磻
(空军工程大学理学院,西安,710051)

摘要　局部修复码是一种局部纠删编码,近年来在分布式存储系统中得到了广泛的应用。码的局部修复度为 r 指的是,码字的任一位发生删除错误时至多需要该码字的其他 r 位进行恢复。研究了 $r\leqslant 3$ 的二元循环局部修复码的存在性与构造。基于循环码定义集理论,采用局部修复码的对偶码描述,依据码的参数制约关系,进行局部修复码的构造及参数优化。证明了 $r=1$ 的任意码长二元循环码的存在性,构造了 $r=1$ 且参数达到 Griesmer 界的局部修复码;给出了 $r=2$ 和 $r=3$ 的部分码长二元循环码存在性的判据,基于 $7\leqslant n\leqslant 99$ 的二元循环码分别构造了 $r=2$ 和 $r=3$ 的、参数优良的短码长局部修复码。研究结果对进一步研究循环码的局部修复度与其他参数的关系、构造参数优良的一般码长局部修复码具有借鉴作用。

关键词　局部修复码;局部修复度;二元循环码;定义集
DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2017.02.018
中图分类号　O157.4　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2017)02-0106-05

Locality of Binary Cyclic Codes in Short Length

RAO Yi, LI Ruihu, FU Qiang, YANG Ruipan
(Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Locally repairable code (LRC) is a class of code aimed at local correction of erasures. This code is applied widely in the distributed storage systems. A code with locality r, requires the access of at most r other codeword symbols to recover a symbol from erasure. This paper studies the existence and construction of binary cyclic LRCs with locality $r\leqslant 3$. Based on the theory of defining set of cyclic codes, the paper describes by adopting the dual of LRCs. After a consideration into the constraints among code parameters, LRCs are constructed and optimized. The existence of binary cyclic codes in arbitrary length with locality 1 is proved and the construction of LRCs meeting the Griesmer bound with locality 1 is offered. Judgment on the existence of binary cyclic codes with locality 2 and 3 is put forward in which LRCs in short length with satisfying parameters and locality 2 and 3 are constructed on the basis of binary cyclic codes in length $7\leqslant n\leqslant 99$. There is much in these results that researchers further study the relationship among locality and other code parameters as well as the construction of LRCs with satisfying parameters in arbitrary length for reference.

Key words: locally repairable codes; locality; binary cyclic code; defining set

---

收稿日期:2016-09-04
基金项目:国家自然科学基金(11471011)
作者简介:饶　驿(1994—),男,湖北麻城人,硕士生,主要从事代数编码研究. E-mail:18629053276@163.com

引用格式:*饶驿,李瑞虎,付强,等. 短码长二元循环码的局部修复度[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2017,18(2):106-110. RAO Yi, LI Ruihu, FU Qiang, et al. Locality of Binary Cyclic Codes in Short Length[J]. Journal of Air Force Engineering University(Natural Science Edition),2017,18(2):106-110.*

分布式存储系统中，当出现由于软、硬件故障导致的数据节点错误(Node failure)时，需要对数据进行修复。文献[1]指出，已有的三重备份(Triple replication)方案造成了存储空间的大量占用，而现行的纠删编码(Erasure coding)方案虽然提高了存储空间的利用率，但进行节点数据修复的速度较慢。由 P. Gopalan 等人[2]于 2012 年提出的局部修复码——一种局部纠删编码方案，克服了已有方案的缺点，具有很好的应用价值，已成为编码研究的前沿领域[2-6]。

局部修复码(Locally repairable code)是一种在分布式存储系统中，通过访问 r 个其他的数据节点从而修复某 1 个节点错误的纠删编码；此处的 r 称为码的局部修复度(Locality)。

定义 1 [4]。令 $\boldsymbol{C}$ 为$[n,k,d]$线性码，若 $\boldsymbol{C}$ 中每一个码字的任意一位至多可由该码字的其他 r 位进行表示，则定义码 $\boldsymbol{C}$ 的局部修复度为 r。

关于修复单个节点错误的局部修复码的研究，目前主要有 3 个方向：一是码的局部修复度的确定[2-8]；二是码的局部修复度与其他参数之间的制约关系，类似于纠错码的界[2,4,9-11]；三是参数满足特定条件的局部修复码的存在性以及构造[12-15]。构造小域上的局部修复度小、码率较高且距离较大的局部修复码是当前研究的热点和难点问题[16-21]，也是实际应用中亟待解决的关键问题。

本文研究用二元循环码构造局部修复码。通过码长 $7\leqslant n\leqslant 99$ 的循环码构造局部修复度 $r\leqslant 3$、参数优良的局部修复码。这些短码长的二元循环局部修复码具有实际应用价值[16-17]，对于构造一般码长的二元循环局部修复码也有很好的借鉴作用。

1　预备知识

设 Z^+ 表示正整数集合，Z_n 表示模 n 整数环，F_2 表示二元域。将 F_2 上码长为 n，维数为 k，最小距离为 d 的线性码 $\boldsymbol{C}$ 记做$[n,k,d]$。若 $\boldsymbol{C}$ 为循环码且 $\boldsymbol{C}$ 的码长 $n=2^m-1$，其中 $m\in Z^+$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为本原循环码。本文研究的循环码，码长满足 $\gcd(n,2)=1$。

引理 1[22]　令 $\boldsymbol{C}$ 为$[n,k,d]$循环码，$g(x)$是 $\boldsymbol{C}$ 中次数最低的首一多项式，则 $\boldsymbol{C}$ 为环 $R_n=F_q[x]/(x^n-1)$中由 $g(x)$生成的理想，并称 $g(x)$为 $\boldsymbol{C}$ 的生成多项式。

令 α 为 F_2 的某个扩域上的 n 次本原单位根，记 $g(x)$的零点所构成的集合为 $Z=\{\alpha^{t_1},\alpha^{t_2},\cdots,\alpha^{t_s}\}$，则集合 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_s\}$可划分为不相交的模 n 的 2-分圆陪集的并集，称 T 为循环码 $\boldsymbol{C}$ 的定义集[7]。令 $\boldsymbol{C}$ 为$[n,k,d]$循环码，$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 的对偶码，若 $\boldsymbol{D}$ 的定义集为 T_D，则 $\boldsymbol{C}$ 的定义集 $T_C=Z_n\setminus T_D^{-1}$。从而 $\boldsymbol{C}$ 的维数 $k=n-|T_C|=|T_D|$。本文中还会用到循环码对偶码的描述、循环码的界、循环码的等价性等理论，可参阅文献[22～23]。

关于一般线性码的局部修复度，目前尚没有通用的计算方法，通常需要具体情况具体分析。得益于循环码良好的代数结构，二元循环码的局部修复度可通过其对偶码的最小距离进行计算。

引理 2[21]　令 $\boldsymbol{C}$ 为$[n,k,d]$循环码，$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 的对偶码。若 $\boldsymbol{D}$ 的最小距离为 $d^{\perp}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的局部修复度为 $r=d^{\perp}-1$。

S. Goparaju 等[4]通过二元本原循环码构造了 3 组 $r=2$ 的特殊局部修复码，本文研究用二元循环码构造局部修复码。利用循环码的对偶码刻划具有指定修复度的局部修复码，通过构造最小距离 $d\leqslant 4$ 的二元循环码 $\boldsymbol{D}$，给出 $r\leqslant 3$ 的局部修复码 $\boldsymbol{C}$，并用码 $\boldsymbol{D}$ 的定义集 T_D 来描述码 $\boldsymbol{C}$。当码 $\boldsymbol{D}$ 的定义集的不相交分解为 $T_D=C_{i_1}\cup\cdots\cup C_{i_t}\ (\bmod\ n)=\bigcup\limits_{i\in I_D^{(n)}} C_i$，其中 $I_D^{(n)}=\{i_1,\cdots,i_t\}$为分圆陪集代表元集合，文中使用 $I_D^{(n)}$ 来代表 T_D 描述 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$。为此，我们先确定局部修复度为 r 的循环码的存在性，然后分析码长、距离等参数与局部修复度的关系，并利用码长 $7\leqslant n\leqslant 99$的循环码构造出局部修复度为 r、参数优良的局部修复码。

2　局部修复度为 r 的循环码的存在性和特征

理论上讲，码的局部修复度 r 越小，越容易修复错误节点；但从编码角度考虑，还需保证码的效率和纠错能力。即给定码长 n，码维数和距离要尽可能大，但往往二者不可兼得，应根据实际需要采取适当折中。由文献[23～24]可知，码长 $7\leqslant n\leqslant 99$ 的二元循环码数量众多，逐个计算每个循环码局部修复度非常困难。为此，先确定给定码长的、局部修复度为 r 的循环码的存在性，再研究如何进行构造。

定理 1　若 $n=n_1n_2$，$n_1\geqslant n_2>1$，则存在局部修复度为 1 的非平凡二元循环码。特别地，若 $n=(2^s-1)n_0$，$s\geqslant 2$ 且 $n_0\geqslant 1$，则存在达到 Griesmer 界的最优码$[(2^s-1)n_0,s,2^{s-1}n_0]$，且 $r=1$。

证明：令 $C_{n_1}=\{n_1,2n_1,\cdots,(2^t-1)n_1\}\ (\bmod\ n)$，其中 t 是使得 $2^tn_1\equiv n_1\ (\bmod\ n)$的最小正整数，可知$|C_{n_1}|<n-1$。否则若有 $n-1\in C_{n_1}$，则 $n-1\equiv 2^ln_1\ (\bmod\ n)$，$2^ln_1+1\equiv 0\ (\bmod\ n)$；由 $n_1|n$ 和 $n_1|$

$2^l n_1$ 得 $n_1 \mid 1$,矛盾。同理可证 $n-2 \notin C_{n_1}$。于是 $|C_{n_1}|=t\leqslant n-3$。以 $T_D=C_{n_1}$ 为定义集的循环码为非平凡码,码 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}^{\perp}$ 是非平凡码且 $\boldsymbol{C}$ 局部修复度 $r=1$。

若 $n=(2^s-1)n_0$,则以定义集为。$T_D=C_{n_0}=\{n_0,2n_0,\cdots,2^{s-1}n_0\}\pmod n$ 的循环码非平凡,且码 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}^{\perp}$ 的定义集 $Z_n\setminus T_D^{-1}$ 中具有 $\delta-1=2^{s-1}n_0-1$ 个连续整数,故 $\boldsymbol{C}$ 的最小距离 $d\geqslant\delta=2^{s-1}n_0$。由 Griesmer 界可推出 $d=2^{s-1}n_0$,即码 $\boldsymbol{C}$ 是达到 Griesmer 界的最优码。

对任意码长 n,是否存在给定距离的循环码,这是编码中目前没有方法解决的难题[25]。对于 $r\leqslant 3$ 的二元循环码,虽不能像 $r=1$ 时给出码长 n 的特征,但可根据具体码长的循环码给出存在性的判据,且该判据对一般码长的循环码依然成立。依据特殊分圆陪集的特征,由文献[22]不难推出如下定理成立。

定理 2 设 $n\geqslant 5$,$\boldsymbol{D}$ 是码长为 n 的二元循环码,其最小距离为 d。

1)若 $\boldsymbol{D}$ 的定义集 $T_D=C_1$ 且 $d\leqslant 3$,则存在码长为 n 且 $r=2$ 的二元循环码。

2)若 $\boldsymbol{D}$ 的定义集 $T_D=C_0\cup C_1$ 且 $d\leqslant 4$,则存在码长为 n 且 $r=3$ 的二元循环码。

C. L. Chen[23] 给出了 $7\leqslant n\leqslant 65$、$d\geqslant 3$ 的二元循环码的最小距离,G. Promhouse 等在[24]中给出了 $69\leqslant n\leqslant 99$、$d\geqslant 2$ 的二元循环码的最小距离。由文献[23]和[24]可知,当码长 $n\in P$,$P=\{11,13,19,29,37,53,59,61,67,83\}$ 时,仅有参数为 $[n,1,n]$ 和 $[n,n-1,2]$ 的循环码,这样的码是两类平凡码,不具备研究价值。除上述 10 个码长外,码长 $7\leqslant n\leqslant 99$ 的二元循环码还有 37 种,故只分析这些循环码。

3 构造局部修复码的方法

对于给定局部修复度 r 和满足定理 2 的码长 n,首先确定 $T_D=C_i$ 和 $T_D=C_i\cup C_j$ 的所有可能情况,然后逐步扩大集合 T_D,同时保证循环码 $\boldsymbol{D}$ 的距离满足要求;在优化 $\boldsymbol{C}$ 的参数时,利用循环码的 BCH 距离界可排除大多数不符合要求的 T_D 和循环码 $\boldsymbol{D}$,从而快速找到参数尽可能好的 $\boldsymbol{C}$。

3.1 $r=2$ 的局部修复码

当码长 $n\in\{17,23,25,41,43,47,65,71,79,89,95,97\}$ 时,不存在 $r=2$ 的二元循环码。当码长 $n\in\{9,27,81\}$ 时,只存在 $d=2$ 且 $r=2$ 的二元循环码。当码长 $n\in\{7,49\}$ 时,只存在 $d=4$ 且 $r=2$ 的二元循环码。从余下的 20 种码长的循环码中,可构造出参数优良的局部修复码,见表 1。

表 1 $r=2$ 的二元循环局部修复码

Tab. 1 Binary cyclic LRCs with locality 2

序号	T_D	C 的参数
1	$I_D^{(15)}=\{1,5\}$	$[15,6,6]$
2	$I_D^{(15)}=\{1,7\}$	$[15,8,4]$
3	$I_D^{(21)}=\{3,7\}$	$[21,5,10]$
4	$I_D^{(21)}=\{1\}$	$[21,6,8]$
5	$I_D^{(21)}=\{1,7\}$	$[21,8,6]$
6	$I_D^{(33)}=\{1\}$	$[33,10,12]$
7	$I_D^{(33)}=\{1,11\}$	$[33,12,10]$
8	$I_D^{(35)}=\{1\}$	$[35,12,8]$
9	$I_D^{(39)}=\{1,13\}$	$[39,14,10]$
10	$I_D^{(45)}=\{1\}$	$[45,12,8]$
11	$I_D^{(45)}=\{1,5\}$	$[45,18,6]$
12	$I_D^{(51)}=\{1\}$	$[51,8,24]$
13	$I_D^{(51)}=\{1,5\}$	$[51,16,16]$
14	$I_D^{(51)}=\{1,5,17\}$	$[51,18,14]$
15	$I_D^{(51)}=\{1,5,11,17\}$	$[51,26,8]$
16	$I_D^{(57)}=\{1\}$	$[57,18,16]$
17	$I_D^{(57)}=\{1,19\}$	$[57,20,14]$
18	$I_D^{(63)}=\{1,21\}$	$[63,8,26]$
19	$I_D^{(63)}=\{1,9\}$	$[63,9,28]$
20	$I_D^{(63)}=\{1,15\}$	$[63,12,24]$
21	$I_D^{(63)}=\{1,9,11\}$	$[63,15,20]$
22	$I_D^{(63)}=\{1,11,13\}$	$[63,18,18]$
23	$I_D^{(63)}=\{1,9,11,15\}$	$[63,21,12]$
24	$I_D^{(63)}=\{5,7,11,13\}$	$[63,24,14]$
25	$I_D^{(63)}=\{5,7,11,13,23\}$	$[63,30,10]$
26	$I_D^{(63)}=\{1,5,7,11,13,23\}$	$[63,36,6]$
27	$I_D^{(63)}=\{1\}$	$[69,22,16]$
28	$I_D^{(63)}=\{1,21\}$	$[69,24,14]$
29	$I_D^{(73)}=\{1\}$	$[73,9,28]$
30	$I_D^{(75)}=\{1,5,35\}$	$[75,28,8]$
31	$I_D^{(75)}=\{1,5,25,35\}$	$[75,30,6]$
32	$I_D^{(77)}=\{1\}$	$[77,30,8]$
33	$I_D^{(85)}=\{1\}$	$[85,8,40]$
34	$I_D^{(87)}=\{1\}$	$[87,28,24]$
35	$I_D^{(87)}=\{1,29\}$	$[87,30,22]$
36	$I_D^{(91)}=\{1\}$	$[91,12,36]$
37	$I_D^{(91)}=\{3,13\}$	$[91,15,28]$
38	$I_D^{(91)}=\{1,9\}$	$[91,24,20]$
39	$I_D^{(91)}=\{3,13,17\}$	$[91,27,16]$
40	$I_D^{(91)}=\{1,9,11\}$	$[91,36,8]$
41	$I_D^{(93)}=\{1\}$	$[93,10,32]$
42	$I_D^{(93)}=\{1,33\}$	$[93,15,16]$
43	$I_D^{(99)}=\{1\}$	$[99,30,12]$
44	$I_D^{(99)}=\{1,11\}$	$[99,36,10]$

3.2　$r=3$ 的局部修复码

当码长 $n\in\{9,23,25,27,73,89,91\}$ 时，不存在 $r=3$ 的二元循环码。从余下的 30 种码长的循环码中，可构造出参数优良的局部修复码，见表 2。

表 2　$r=3$ 的二元循环局部修复码

Tab. 2　Binary cyclic LRCs with locality 3

序号	T_D	C 的参数
1	$I_D^{(15)}=\{0,1\}$	[15,5,7]
2	$I_D^{(15)}=\{3,5\}$	[15,6,6]
3	$I_D^{(15)}=\{0,1,5\}$	[15,7,5]
4	$I_D^{(21)}=\{0,1\}$	[21,7,8]
5	$I_D^{(21)}=\{0,1,7\}$	[21,9,6]
6	$I_D^{(31)}=\{0,1\}$	[31,6,15]
7	$I_D^{(33)}=\{3,11\}$	[33,12,6]
8	$I_D^{(35)}=\{5,7\}$	[35,7,14]
9	$I_D^{(35)}=\{5,7,15\}$	[35,10,10]
10	$I_D^{(35)}=\{0,1\}$	[35,13,8]
11	$I_D^{(35)}=\{0,1,7\}$	[35,17,6]
12	$I_D^{(39)}=\{3,13\}$	[39,14,6]
13	$I_D^{(45)}=\{3,5,9,15\}$	[45,16,10]
14	$I_D^{(45)}=\{3,5,9,21\}$	[45,18,6]
15	$I_D^{(45)}=\{0,1,5,15\}$	[45,21,5]
16	$I_D^{(51)}=\{0,5\}$	[51,9,19]
17	$I_D^{(51)}=\{5,17\}$	[51,10,18]
18	$I_D^{(51)}=\{0,5,17\}$	[51,11,17]
19	$I_D^{(51)}=\{3,9,17\}$	[51,18,6]
20	$I_D^{(55)}=\{5,11\}$	[55,14,10]
21	$I_D^{(57)}=\{3,5\}$	[57,36,6]
22	$I_D^{(63)}=\{0,11\}$	[63,7,31]
23	$I_D^{(63)}=\{11,27\}$	[63,9,28]
24	$I_D^{(63)}=\{0,9,11\}$	[63,10,27]
25	$I_D^{(63)}=\{11,21,27\}$	[63,11,26]
26	$I_D^{(63)}=\{0,11,15\}$	[63,13,24]
27	$I_D^{(63)}=\{0,1,9,11\}$	[63,16,20]
28	$I_D^{(63)}=\{1,9,11,21\}$	[63,17,18]
29	$I_D^{(63)}=\{0,1,9,11,21\}$	[63,18,17]
30	$I_D^{(63)}=\{1,11,15,21\}$	[63,20,16]
31	$I_D^{(63)}=\{1,7,9,11,21\}$	[63,23,14]
32	$I_D^{(63)}=\{1,7,11,15,21\}$	[63,26,12]
33	$I_D^{(63)}=\{1,7,9,11,15,21\}$	[63,29,10]
34	$I_D^{(63)}=\{0,1,7,9,11,15,21\}$	[63,30,7]
35	$I_D^{(63)}=\{0,1,7,11,15,21,23\}$	[63,33,6]
36	$I_D^{(65)}=\{5,13\}$	[65,16,10]
37	$I_D^{(69)}=\{3,23\}$	[69,13,24]
38	$I_D^{(69)}=\{0,3,23\}$	[69,14,21]
39	$I_D^{(73)}=\{0,1\}$	[73,10,28]
40	$I_D^{(75)}=\{1,5,15,35\}$	[75,32,8]
41	$I_D^{(77)}=\{7,11,33\}$	[77,16,14]
42	$I_D^{(77)}=\{0,1\}$	[77,31,8]
43	$I_D^{(85)}=\{0,1\}$	[85,9,37]
44	$I_D^{(85)}=\{3,17\}$	[85,12,34]
45	$I_D^{(85)}=\{0,1,7\}$	[85,17,24]
46	$I_D^{(85)}=\{3,13,17\}$	[85,20,22]
47	$I_D^{(85)}=\{0,3,13,17\}$	[85,21,17]
48	$I_D^{(89)}=\{1\}$	[89,11,40]
49	$I_D^{(91)}=\{0,1\}$	[91,13,36]
50	$I_D^{(91)}=\{0,3,13\}$	[91,16,28]
51	$I_D^{(91)}=\{0,1,9\}$	[91,25,20]
52	$I_D^{(91)}=\{0,3,13,17\}$	[91,28,16]
53	$I_D^{(91)}=\{1,7,9\}$	[91,36,14]
54	$I_D^{(91)}=\{3,7,13,19\}$	[91,39,12]
55	$I_D^{(91)}=\{0,3,7,13,19\}$	[91,40,7]
56	$I_D^{(91)}=\{0,1,7,9,11\}$	[91,49,6]
57	$I_D^{(93)}=\{0,1\}$	[93,11,32]
58	$I_D^{(99)}=\{11,15,33\}$	[99,18,22]
59	$I_D^{(99)}=\{9,11,15,33\}$	[99,28,18]
60	$I_D^{(99)}=\{0,9,11,15,33\}$	[99,29,9]

3　结语

本文在现有的关于二元循环码研究成果的基础上，基于循环码的定义集理论和局部修复度的求解方法，研究了局部修复度 $r\leqslant 3$ 的二元循环码的存在性及相应的局部修复码的构造。通过将局部修复码的研究转化为其对偶码的研究，考察了 $d\leqslant 4$ 的一般码长二元循环码的存在性和参数特征，构造了一组 $r=1$ 且参数达到 Griesmer 界的局部修复码。在对 $7\leqslant n\leqslant 99$ 的不可约和双因子循环码的研究基础上，优化码的参数，构造了一批 $r=2$ 和 $r=3$ 的、参数优良的短码长局部修复码。这些结果为进一步研究二元循环码的局部修复度与其他参数间的关系，构造性能优良的二元局部修复码等工作提供了借鉴思路。

参考文献(References)：

[1]　WEATHERSPOON H, KUBIATOWICZ J. Erasure Coding Vs. Replication: A Quantitative Comparison [J]. Peer-to-Peer Systems of the Lecture Notes in Computer Science, 2002, 2429:328-337.

[2]　GOPALAN P, HUANG C, SIMITCI H, et al. On the Locality of Codeword Symbols[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(11): 6925-6934.

[3]　OGGIER F, DATTA A. Self-RepairingHomomorphic Codes for Distributed Storage Systems [C]// Proceedings of IEEE INFOCOM. Shanghai, China,

2011: 1215-1223.

[4] PAPAILIOPOULOS D S, DIMAKIS AG. Locally Repairable Codes [C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Cambridge, USA, 2012: 2771-2775.

[5] SATHIAMOORTHY M, ASTERIS M, PAPAILIOPOULOSD et al. XORing Elephants: Novel Erasure Codes for Big Data [J]. Proceedings of VLDB Endowment, 2013, 6(5): 325-336.

[6] SHAHABINEJAD M, KHABBAZIAN M, ARDAKANI M. An Efficient Binary Locally Repairable Code for Hadoop Distributed File System [J]. IEEE Communications Letters, 2014, 18(8): 1287-1290.

[7] RAWAT A S, VISHWANATH S. On locality in Distributed Storage Systems [C]//IEEE Information Theory Workshop. New York, 2012: 497-501.

[8] KUIJPER M, NAPP D. Erasure Codes with Simplex Locality[J]. Mathematics, 2014(July), arXiv: 1403.2779, 2014.

[9] PRAKASH N, KAMATH G M, LALITHA V et al. Optimal Linear Codes with A Local-Error-Correction Property [C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Cambridge, USA, 2012: 2776-2780.

[10] SILBERSTEIN N, RAWAT A S, KOYLUOGLU O O et al. Optimal Locally Repairable Codes via Rank-Metric Codes [C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Istanbul, Turkey, 2013: 1819-1823.

[11] CADAMBE V, MAZUMDAR A. An Upper Bound on The Size of Locally Recoverable Codes [C]//IEEE International Symposium on Network Coding, Calgary. Canada, 2013: 1-5.

[12] TAMO I, PAPAILIOPOULOS D S, DIMAKIS A G. Optimal Locally Repairable Codes and Connections to Matroid Theory [C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Istanbul, Turkey, 2013: 1814-1818.

[13] TAMO I, BARG A. A Family of Optimal Locally Recoverable Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(8): 4661-4676.

[14] SONG W,DAU S H, YUEN C et al. Optimal Locally Repairable Linear Codes [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2014, 32(5): 1019-1036.

[15] ERNVALL T, WESTERBACK T, HOLLANTI C. Constructions of Optimal and Almost Optimal Locally Repairable Codes [C]// IEEE International Conference on VITAE. Aalborg, Denmark, 2014: 1-5.

[16] GOPARAJU S, CALDERBANK R. Binary Cyclic Codes That Are Locally Repairable [C]// IEEE International Symposium on Information Theory. New York, USA, 2014: 676-680.

[17] ZEH A, YAAKOBI E. Optimal Linear and Cyclic Locally Repairable Codes over Small Fields [J]. 2015 IEEE Information Theory Workshop (ITW), 2015. DOI:10.1109/itw.2015.7133123.

[18] HUANG P, YAAKOBI E, UCHIKAWA H et al. Cyclic Linear Binary Locally Repairable Codes [J]. 2015 IEEE Information Theory Workshop (ITW), 2015. DOI:10.1109/itw.2015.7133128.

[19] TAMO I, BARG A, GOPARAJUS et al. Cyclic LRC Codes and Their Subfield Subcodes [C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Hong Kong, China, 2015: 1262-1266.

[20] TAMO I, BARG A, GOPARAJU S et al. Cyclic LRC Codes, Binary LRC Codes, and Upper Bound on The Minimum Distance of Cyclic Codes[J]. International Journal of Information and Coding Theory, 2016, 3(4): 345.

[21] HUANG P, YAAKOBI E, UCHIKAWAH et al. Binary Linear Locally Repairable Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(11): 6268-6283.

[22] HUFFMAN W, PLESSV. Fundamentals of Error-Correcting Codes [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[23] PETERSON W, WELDON E. Error Correcting Codes [M]. Cambridge: MIT Press, 1996: 493-534.

[24] PROMHOUSE G, TAVARES S. The Minimum Distance of All Binary Cyclic Codes of Odd Lengths from 69 to 99 [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1978, 24(4): 438-442.

[25] CHARPIN P. Open Problems on Cyclic Codes [G]// Handbook of Coding Theory. New York: Elsevier, 1998: 963-1064.

(编辑:姚树峰)