应用粒子群-序列二次规划算法的结构可靠性优化

唐　承[1]， 郭书祥[1]， 莫延彧[2]， 龚小平[1]
(1.空军工程大学理学院,西安,700051;2.空军工程大学航空航天工程学院,西安,710038)

摘要　针对粒子群算法在寻优过程中局部搜索能力较差、后期收敛慢的缺点,提出使用序列二次规划法来改进粒子群算法的局部搜索性能。该混合算法既保持了粒子群算法全局收敛的特点,又补充了序列二次规划法精确求解的能力,因此该算法可以快速获取全局最优解。应用于经典测试函数,可得到较高精度的最优解,验证了算法的有效性。对实际齿轮减速器进行结构可靠性优化设计,建立了结构可靠度约束下最小体积的优化模型,并用该混合算法方法进行优化计算,仿真计算结果表明:该方法解决结构可靠性优化问题是合理有效的。

关键词　结构可靠性;优化设计;粒子群算法;序列二次规划法

DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2016.02.021

中图分类号　TB114.3;TU318　**文献标志码**　A　**文章编号**　1009-3516(2016)02-0107-05

An Optimal Design of Structural Reliability Based on Particle Swarm Optimization-Sequential Quadratic Programming Algorithm

TANG Cheng[1], GUO Shuxiang[1], MO Yanyu[2], Gong Xiaoping[1]
(1. Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: In the light of the shortcomings that particle swarm optimization (PSO) algorithm is poor in locally searching ability in the process of optimization, and/or is slow in speed of convergence in later period, a sequential quadratic programming (SQP) integrated particle swarm optimization algorithm (PSO-SQP) is presented. The proposed method not only keeps the characteristics of globally converging of PSO, but also compensates SQP for the effective local search ability, and simultaneously obtains the global optimal result quickly. The method applied to the classic test function can get the optimal solution of high precision. An optimization design of structural reliability for gear reducer is made, and its mathematical model is built up based on PSO-SQP. The results show that this method is reasonable and effective in solving the problems of reliability optimal design.

Key words: structural reliability; optimal design; particle swarm optimization; sequential quadratic programming

---

收稿日期:2015-06-18
基金项目:国家自然科学基金(51175510)
作者简介:唐　承(1991—),男,四川德阳人,硕士生,主要从事结构可靠性与优化设计研究.E-mail:tangchenggood@163.com

引用格式:唐承,郭书祥,莫延彧,等. 应用粒子群-序列二次规划算法的结构可靠性优化[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2016,17(2):107-111. TANG Cheng, GUO Shuxiang, MO Yanyu, et al. An Optimal Design of Structural Reliability Based on Particle Swarm Optimization-Sequential Quadratic Programming Algorithm[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2016, 17(2): 107-111.

在考虑可靠性问题的结构设计中,通常将结构的可靠度要求作为约束条件结合到优化问题的约束条件内,通过优化设计参数从而使结构的体积(费用)达到最小[1-2]。

在传统优化计算过程中,由于实际工程问题存在变量维数高、高度非线性等特点,运用传统的数学优化算法难以解决。随着智能优化理论的快速发展和完善,智能算法的寻优能力也有所增强,使其为解决实际工程问题提供了新的思路和手段[3]。Kennedy 和 Eberhart 于 1995 年共同提出了一种新的智能进化算法-粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)[4]。PSO 算法通过迭代寻优求解,能快速找到最优解[5],同遗传算法相比,具有操作较简单可并行搜索且不需要梯度信息等优点,正成为智能优化领域研究的新方向[6-7],并应用于结构可靠性优化设计领域[8]。葛锐[9]等改进了 PSO 算法的位置更新方程,增强了粒子全局搜索能力;程跃[10]等将混沌优化和 PSO 算法结合,解决可靠性优化问题;张辉[2]等提出了动态改变惩罚系数的改进 PSO 算法。PSO 算法的主要缺点是粒子的飞行速度很大程度上影响着算法的全局收敛性能,当对粒子的速度缺乏有效控制和约束时,则存在优化后期速度变慢、优化结果出现早熟等缺陷[11]。

序列二次规划法(Sequential Quadratic Programming,SQP)的寻优搜索方向是根据方程梯度下降方向进行的,从而能够使搜索结果收敛于局部极小点[12],可改善 PSO 算法的固有缺点。本文将 PSO 算法和 SQP 法结合进行寻优计算,采用 PSO 算法对整个问题空间进行搜索,用 SQP 法局部精确搜索的能力,用该混合算法,建立实际齿轮减速器的结构可靠度约束下最小体积的优化模型。

1 建立结构可靠性优化设计模型

结构可靠度计算的近似解析方法主要包括一次二阶矩法(FOSM)和点估计法等。FOSM 法以其计算简便,在大多数情况下精度能满足工程应用要求而被工程界所接受。均值一次二阶矩法(MVFOSM)和改进一次二阶矩法(AFOSM)均属于 FOSM 法。采用 AFOSM 法虽能得到更好的最优解,但搜索设计点过程需要迭代而引起计算效率低,同时当随机变量 X_i 的标准差 σ_{Xi} 相对其均值 μ_{Xi} 非常小时,而 MVFOSM 法具有足够的精度,因此在本文算例中采用 MVFOSM 法求解可靠度以平衡算法的计算效率和精度[13]。可靠性指标使用极限状态函数的平均值和标准差来表示:

$$g(X) \approx g(\mu_X) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g(X)}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} (X_i - \mu_{X_i}) \tag{1}$$

由此获得功能函数 $g(X)$ 的均值和标准差为:

$$\mu_g = g(\mu_X) \tag{2}$$

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial g(X)}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left.\frac{\partial g(X)}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} \left.\frac{\partial g(X)}{\partial X_j}\right|_{\mu_X} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \tag{3}$$

式中:σ_{Xi} 为随机变量 X_i 的标准差;$\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ 为 X_i 和 X_j 的协方差,$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{XiXj}\sigma_{Xi}\sigma_{Xj}$,其中 ρ_{XiXj} 为 X_i 和 X_j 的相关系数。

于是,可靠度计算公式为:

$$R = \Phi(\mu_g / \sigma_g) \tag{4}$$

可靠性优化模型通常包括以可靠度为约束条件和以可靠度为目标函数,本文算例是齿轮减速器的可靠性优化设计,其作为一般结构,以体积为目标函数,以可靠度和其它设计指标等为约束条件,其数学模型可表示为[14]:

$$\begin{aligned} &\min f(X) \\ &\text{s.t. } R_{i0} - R_i(X) \leqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ &g_u(X) \leqslant 0 \quad u = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{5}$$

式中:$f(X)$ 为体积的目标函数;R_{i0} 为结构可靠度要求的下限;$R_i(X)$ 为结构的实际可靠度;$g_u(X)$ 为其他常规的实际约束。

2 PSO-SQP 算法

2.1 标准 PSO 算法

PSO 算法[6]寻找最优解的方法是模拟鸟群寻找栖息地而产生的,在模拟寻优过程中,粒子群在飞行过程中逐渐向最优解靠拢,最后找到最优解。用 PSO 算法进行寻优计算时,首先初始化生成一群随机粒子(随机解),之后通过迭代找到最优解,在每一次迭代过程中,粒子通过跟踪 2 个最值来更新自己下一步的状态,个体极值 $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{id}, \cdots, p_{iD})$ 和全局极值 $p_g = (p_{g1}, pg_2, \cdots, p_{gd}, \cdots, p_{gD})$,分别代表粒子本身和整体粒子群寻找到的最优解[15]。

具体迭代公式如下:

$$v_{id}^{t+1} = \omega v_{id}^t + c_1 r_1 (p_{id}^t - x_{id}^t) + c_2 r_2 (p_{gd}^t - x_{id}^t) \tag{6}$$

$$x_{id}^{t+1} = x_{id}^t + v_{id}^{t+1} \tag{7}$$

式中:$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{id}, \cdots, x_{iD})$ 和 $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{id}, \cdots, v_{iD})$ 分别表示第 i 个粒子在 D 维解空间的位置和速度,t 为迭代次数;ω 为惯性权重系

数；c_1 和 c_2 为正的学习因子，代表将每个粒子推向 p_i 和 p_g 位置的统计加速项的权值，一般取常数；r_1、r_2 为 0 到 1 之间均匀分布的随机数。同时，可以通过设置粒子的速度和位置范围，对粒子的移动进行适当的限制。

从模型可以看出，粒子的飞行速度直接影响着算法的全局收敛性能。粒子速度较大时，能使各粒子较快的飞向全局最优解的区域；但当对粒子飞行速度缺乏有效的控制和约束时，粒子很容易在逼近最优解时飞离最优解，从而很难收敛到全局最优。所以在对算法的速度缺乏有效控制时，会在优化后期出现收敛速度变慢、优化结果早熟等缺陷现象。

2.2　SQP 法

SQP 法最初由 Wilson 于 1963 年在其博士学位论文中提出[16]。在用 SQP 法对约束优化问题进行计算时，首先在每个迭代点构造一个二次规划子问题，然后将该子问题的解作为迭代搜索的方向，最后沿该搜索方向进行一维搜索，直到逼近约束优化问题的解[17]。因此该算法在解决非线性约束优化问题具有收敛速度快，计算效率高等优点。但 SQP 法也存在其固有缺点，初值点位置的选取对其计算效率和精度影响较大，因此给定一个合理的初值点是使用该方法的前提。

2.3　PSO 算法与 SQP 法的融合

将 PSO 算法与 SQP 法融合，主要是利用 PSO 算法的全局寻优能力和 SQP 法的精确求解及快速收敛的能力，从而在避免两者缺点的同时较好地优势互补。PSO-SQP 算法的主要思想是：先用 PSO 算法进行迭代计算，当前后 2 次迭代计算的最优解变化小于指定值时，可用当前最终解作为 SQP 算法计算的初始值，在当前迭代点处，利用最小体积目标函数和可靠性等约束条件的二次近似构成一个罚函数式的二次规划，通过求解无约束二次规划问题从而获得下一个迭代点，如此反复迭代，直至获得最小体积。PSO-SQP 算法具体描述如下：

Step1　初始化参数，设定各变量取值范围、惯性权重、学习因子等参数。

Step2　初始化随机产生一定数量的粒子种群。

Step3　采用 PSO 算法进行一定次数的寻优计算，得到最优值 $f(X)$ 及其变量 X。

Step4　判断 PSO 算法是否为 SQP 法提供了较好的计算初值，如果 $|f^{n+1}(X)-f^{n}(X)|\leqslant\varepsilon$ 则 **Step5**；否则，返回 **Step2**。

Step5　设定 X 为 SQP 法的初始值。

Step6　通过 SQP 法对局部区域精确搜索，从而得到局部区域的最优化计算结果 $f(X_{\mathrm{SQP}})$ 及其变量 X_{SQP}。

Step7　判断优化计算的最终值，取 2 种算法的最小值为最优解，即对 $f(X_{\mathrm{SQP}})$ 和 $f(X)$ 的大小进行比较。

2.4　测试 PSO-SQP 算法

为了验证所提 PSO-SQP 算法的合理性，同时检验算法寻优能力，选取文献[2]中的一个多极值测试函数进行优化计算，并和文献中所列算法的寻优结果比较，已知其测试函数最优值 680.630，分别对测试函数运行 30 次独立计算，记录其最优解和平均解，优化结果均列于表 1。

$$\min f(x)=(x_1-10)^2+5(x_2-12)^2+x_3^4+3(x_4-11)^2+10x_5^6+7x_6^2+x_7^4-4x_6x_7-10x_6-8x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}g_1(x)=-127+2x_1^2+3x_2^4+x_3+4x_4^2+5x_5\leqslant 0\\ g_2(x)=-282+7x_1+3x_2+10x_3^2+x_4-x_5\leqslant 0\\ g_3(x)=-196+23x_1+x_2^2+6x_6^2-8x_7\leqslant 0\\ g_4(4)=4x_1^2+x_2^2-3x_1x_2+2x_3^2+5x_6-11x_7\leqslant 0\end{cases}\tag{8}$$

式中：变量 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 取值范围为 $-10\sim10$。使用 PSO-SQP 算法到的最优解为 $x^*=$(2.337 5，1.951 0，−0.434 5，4.362 9，−0.620 6，1.035 2，1.594 0)，最优值为 680.635。

表 1　优化结果对比

Tab.1　Comparison of optimal results

	DPPSO[2]	TPSO[2]	PSO	PSO-SQP
最优解	680.690	680.638	681.795	680.635
平均解	682.248	684.066	682.253	680.733

从表 1 的数据可以看出，PSO-SQP 算法可计算出相对优秀的最优解，同时表现出较好的稳定性和准确性，表明 SQP 法可有效解决 PSO 算法的局部搜索能力较差问题。同时对 PSO-SQP 算法和 PSO 算法的迭代次数及计算时间分析时，发现平均迭代次数 PSO-SQP 算法为 PSO 算法的 1/3 左右，说明 PSO 算法后期收敛慢的缺点得到改进，平均迭代时间增加了 1 倍左右，表明计算精度的提高是以计算量的增加为代价。综上，验证了 PSO-SQP 算法的合理性和有效性。

3　实例分析

齿轮减速器是工业设备中广泛使用的一种通用部件，图 1 为减速器的优化设计模型[18]。优化目标为减速器的最小体积，约束包括齿轮齿根弯曲强度和齿面接触强度 g_1 和 g_2、轴的横向变形约束 g_3 和 g_4、轴的应力约束 g_5 和 g_6、根据经验确定的几何条件 $g_7\sim g_{11}$ 以及设计变量的边界约束约束条件。设

计变量取随机变量的均值,其分布见表 2,长度单位为 cm,其中 x_3 为离散整数变量。此问题的数学模型为:

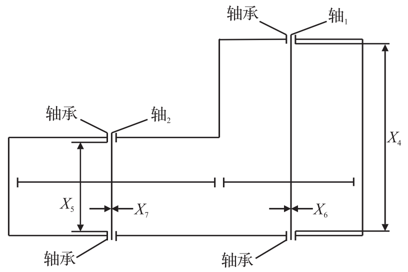

图 1 齿轮减速器传动原理图

Fig.1 The principle diagram of gear reducer drive

表 2 设计变量的概率特性

Tab.2 The probability characteristics of design variables

变量	均值	标准差	分布类型
x_1 为齿面宽度	[2.6,3.6]	0.05	Normal
x_2 为齿轮模量	[0.7,0.8]	0.01	Normal
x_3 为副齿轮的齿数	[17,28]	—	—
x_4 为轴 1 上两轴承间距离	[7.3,8.3]	0.05	Normal
x_5 为轴 2 上两轴承间距离	[7.8,8.3]	0.05	Normal
x_6 为轴 1 的直径	[2.9,3.9]	0.05	Normal
x_7 为轴 2 的直径	[5.0,5.5]	0.05	Normal

$$\min f(X)=0.785\,4x_1x_2^2(3.333\,3x_3^2+14.933\,4x_3-43.093\,4)-1.508x_1(x_6^2+x_7^2)+7.477\,7(x_6^3+x_7^3)+0.785\,4(x_4x_6^2+x_5x_7^2)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & g_1(X)=27-x_1x_2^2x_3\leqslant 0\\
& g_2(X)=397.5-x_1x_2^2x_3^2\leqslant 0\\
& g_3(X)=1.93x_4^3-x_2x_3x_6^4\leqslant 0\\
& g_4(X)=1.93x_5^3-x_2x_3x_7^4\leqslant 0\\
& g_5(X)=[(745x_4/x_2x_3)2+10.9\times 10^6]^{1/2}-110x_6^3\leqslant 0\\
& g_6(X)=[(745x_4/x_2x_3)2+157.5\times 10^6]^{1/2}-110x_7^3\leqslant 0\\
& g_7(X)=x_2-40x_3\leqslant 0\\
& g_8(X)=x_1-12x_2\leqslant 0\\
& g_9(X)=5x_2-x_1\leqslant 0\\
& g_{10}(X)=1.5x_6-x_4+1.9\leqslant 0\\
& g_{11}(X)=1.5x_7-x_5+1.9\leqslant 0
\end{aligned}\tag{9}$$

为简化问题,仅将表征零件强度的约束条件 $g_1 \sim g_6$ 处理为可靠性约束,其余约束条件仍看作确定性约束处理,可靠度 R 均取 0.999 9,将齿轮减速器的可靠性优化数学模型转化为式(5)的形式。采用 PSO-SQP 算法进行优化计算,优化结果见表 3。为了方便比较,同时列出其他文献的几种参考解。

可以看出,采用 PSO-SQP 算法优化的结果较文中所列举的算法更满意,从而达到了在保证可靠性条件下减小体积、降低成本的目的。分析 PSO-SQP 算和 SQP 法的计算效率分析时发现只有当 SQP 法的初值点选取相当精确时,计算效率和精度才与 PSO-SQP 法相当,然而在实际工程问题中精确的选取初值点十分困难。因此,PSO-SQP 算法在解决实际结构可靠性优化问题时有效且实用。

表 3 齿轮减速器优化结果对比

Tab.3 Comparison of gear reducer optimization results

	SQP[9]	BBA-GA[18]	IPSO[9]	PSO-SQP
X_1	3.5	3.578 5	3.500 0	3.500 0
X_2	0.7	0.706 7	0.700 0	0.700 0
X_3	17	17.000 0	17.000 0	17.000 0
X_4	7.3	7.636 6	7.300 0	7.345 6
X_5	7.3	7.442 1	7.800 0	7.880 3
X_6	3.35	3.538 5	3.350 2	3.350 3
X_7	5.29	5.034 3	5.274 3	5.000 0
$f(X)$	2 985.2	2 952.4	2 988.5	2 825.7

4 结语

实际结构使用过程中受控于诸多不确定性因素,因此考虑可靠性问题的优化设计是实际结构设计的现实需要。由于 PSO 算法在寻优过程中存在局部搜索能力较差、后期收敛慢的缺点,本文采用 SQP 法与 PSO 算法融合,提高了算法局部搜索和快速求解的能力。对实际齿轮减速器进行结构可靠性优化设计仿真计算结果表明:该算法在解决实际结构可靠性优化问题时合理有效,同时发现算法计算精度的提高同时会带来计算效率的相对下降,所以对于不同的问题需合理地设置内部参数才能更好地权衡计算效率和精度。

参考文献(References):

[1] GUO ShuXiang ,LI Ying . Non-probabilistic Reliability Method and Reliability-based Optimal LQR Design for Vibration Control of Structures with Uncertain-but-Bounded Parameters[J].Acta Mechanica Sinica,2013, 29(6):864-874.

[2] 张辉,叶南海,陈凯.改进的粒子群算法在可靠性优化设计中的应用[J].机械设计 2012, 29(7):59-63.
ZHANG Hui,YE Nanhai,CHEN Kai.Application of Improved Particle Swarm Optimization Algorithm in Design of Reliability Optimization[J]. Journal of Machine Design,2012, 29(7):59-63. (in Chinese)

[3] LIANGiang J J, QINin A K, SUGANTHAN P N, et al. Comprehensive Learning Particle Swarm Optimizer for Global Optimization of Multimodal Functions [J]. IEEE Trans Evol Compute, 2006, 10: 281-295

[4] 田萍芳,王从军. 粒子群算法在机械零部件可靠性优化设计的应用[J].自动化仪表,2005,26(7):24-26.
TIAN Pingfang,WANG Congjun. Application of Par-

ticle Swarm Optimization in Design of Reliability of Mechanical Parts and Assemblies [J]. Process Automation Instrumentation，2005，26(7)：24-26.(in Chinese)

[5] CHEN TaCheng . Penalty Guided PSO for Reliability Design Problems.[J] Pricai 2006，2006 (4099)：777-786.

[6] 于颖，李永生，朴孝春.粒子群算法在工程优化设计中的应用[J].机械工程学报，2008，12(44)：226-231.
YU Ying，LI Yongsheng，PIAO Xiaochun. Application ofParticle Swarm Optimization in the Engineering Optimization Design [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2008，12 (44) ：226-231. (in Chinese)

[7] SHEIKHALISHAHI M ，EBRAHIMIPOUR V，SHIRI H，et al.A Hybrid GA - PSO Approach for Reliability Optimization in Redundancy Allocation Problem[J]. Original Article，2013 (68)：317-338.

[8] MIN ByoungMun ，RYU Hyeok ，SANG Daekyu ，et al. Autopilot Design Using Hybrid PSO-SQP Algorithm [J]，CCIS，2007，(2)：596-604.

[9] 葛锐，陈建桥，魏俊红.基于改进粒子群算法的机械结构优化设计[J] 机械科学与技术，2007，26(8)：1063-1066.
GE Rui，CHEN Jianqiao，WEI Junhong. Optimal Design of Mechanical Structure Based on Improved Particle Swarm Algorithm [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering，2007，26(8)：1063-1066. (in Chinese)

[10] 程跃，程文明，郑严.基于混沌粒子群算法的结构可靠性优化设计[J].中南大学学报，2011，3(24)：671-676.
CHENG Yue，CHENG Wenming，ZHENG Yan. Structural Reliability Optimal Design Based on Chaos Particle Swarm Optimization [J].Journal of Central South University，2011，3(24)：671-676. (in Chinese)

[11] NIU Qun，ZHOUZhuo，ZENG Tingting. A Hybrid Quantum-Inspired Particle Swarm Evolution Algorithm and SQP Method for Large-Scale Economic Dispatch Problems [C]//ICIC 2011，LNBI 6840：207-214.

[12] 夏晓华，刘波，金以慧.基于微粒群优化的序贯二次规划方法[J].计算机工程与应用，2006，69(23)：69-71.
XIA Xiaohua，LIU Bo，JIN Yihui.Sequential Quadratic Programming Based on Particle Swarm Optimization [J]. Journal of Environmental Sciences，2006，69 (23)：69-71(in Chinese)

[13] 孔旭光，刘俊卿，李力. 路基结构的可靠性分析[J]. 路基工程，2010，5(3)：24-26.
KONG Xu guang，LIU Junqing，LI Li. Reliability Analysis on Subgrade Structure [J]. Subgrade Engineering，2010，5(3)24-26 (in Chinese).

[14] 洪蕾. 粒子群及人工鱼群算法优化研究[J].软件，2014，8(35)83-86.
HONG Lei.The Study of Particle Swarm Optimization and Artificial Fish Swarm Algorithm [J].Software，2014，8(35) 83-86.(in Chinese)

[15] ZHONG Weimin ，LI Shaojun，QIAN Feng.A New Strategy of Particle Swarm Optimization[J] Journal of Zhejiang University，2008，9(6)：786-790

[16] ZHANG Juliang，ZHANG Xiangsun.A SQP Method for Inequality Constrained Optimization [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2002，18(1)：77-84.

[17] 叶秉良，郭绍义，戚金明. 基于 SQP 法的斜齿圆柱齿轮减速器可靠性优化设计[J]. 浙江理工大学学报，2008，2(25)：187-190.
YE Bingliang，GUO Shaoyi，QI Jinming. Reliability Optimization Design of Helical Gear Reducer Based on SQP Algorithm.[J] Journal of Zhejiang Sci-tech University，2008，2(25)：187-190. (in Chinese)

[18] 王志刚，张均富，王进戈.齿轮减速器的多目标可靠性优化设计[J] 机械设计与研究，2011，27(6)：44-47.
WANG Zhigang，ZHANG Junfu，WANG Jinge. Multi-Objective Reliability-Based Design Optimization of Gear Reducer [J]. Machine Design and Research，2011，27(6)：44-47. (in Chinese)

(编辑：徐敏)