

# 基于固定垒高的双稳态系统参数调节方法

吕浩源, 张 辉, 庞春雷, 曹海霞

(空军工程大学信息与导航学院,西安,710077)

**摘要** 针对双稳态随机共振系统参数选取困难的问题,基于四阶龙格塔库算法,提出了一种以固定垒高为约束条件的系统参数调节方法。首先,根据输出信噪比公式,得到固定垒高  $\Delta V$  下系统参数  $a, b$  的约束条件。然后,在约束条件下快速搜索  $a$  值,使微弱信号产生的频谱幅度峰值再次增大,从而得到与输入信号匹配的最大输出信噪比。仿真结果表明,在高频微弱信号检测中,该方法可以有效抑制低频分量干扰,信噪比较没有设定约束条件的参数调节方法平均提高了 3.50 dB。

**关键词** 随机共振;双稳态;信噪比;参数调节

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2016.01.016

**中图分类号** TN957 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2016)01-0083-07

## A Method of Adjusting Parameters in Bi-stable System Based on the Fixed Height of Potential Barrier

LÜ Haoyuan, ZHANG Hui, PANG Chunlei, CAO Haixia

(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

**Abstract:** Aimed at the difficulty of selecting parameters in bi-stable stochastic resonance system, based on the Runge-Kutta algorithm, a system parameters adjustment method is put forward in taking the fixed potential barrier height as conditions of constraint in this paper. First, according to the formula of output signal's SNR, the constraint conditions of parameters  $a, b$  are obtained. Then, the value of  $a$  is rapidly searched under conditions of constraint, thus making the output spectrum amplitude increased again. Finally, the maximum SNR of the output signal corresponding to the input signal can be obtained. The simulation results show that this method can effectively suppress the low frequency interference signals in detecting high frequency weak signals, and the output signal's SNR is increased by on average compared to that of traditional methods with no constraint conditions.

**Key words:** stochastic resonance; bi-stable; SNR; parameter adjustment

与传统信号检测方法不同,基于随机共振<sup>[1-2]</sup>  
(Stochastic Resonance, SR)的微弱信号检测不是削

弱抑制噪声,而是利用噪声的能量转移实现输出信  
噪比大于输入信噪比。这种方法克服了去除噪声时

收稿日期:2015-07-04

基金项目:国家自然科学基金(61273049)

作者简介:吕浩源(1991-),男,吉林集安人,硕士生,主要从事微弱信号检测和完好性监测研究。E-mail:759874434@qq.com

**引用格式:** 吕浩源,张辉,庞春雷,等. 基于固定垒高的双稳态系统参数调节方法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2016,17(1):83-89. LÜ Haoyuan, ZHANG Hui, PANG Chunlei, et al. A Method of Adjusting Parameters in Bi-stable System Based on the Fixed Height of Potential Barrier[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2016, 17(1): 83-89.

对有用信号造成损失,这一优点使其在雷达探测、声纳探测<sup>[3]</sup>、振动故障检测<sup>[4]</sup>、通信<sup>[5]</sup>等微弱信号检测领域得到了广泛的关注和研究,而目前大部分研究多是基于双稳态随机共振模型<sup>[6-8]</sup>。

由于受绝热近似理论和线性响应理论<sup>[9]</sup>的限制,要求所检测的微弱信号必须满足低频率、小信号,而在科学研究和工程实践当中的多为高频率或大噪声。为了满足系统检测的要求,人们分别提出了调制随机共振<sup>[10]</sup>和尺度变换随机共振<sup>[11]</sup>,而这些方法都是针对输入信号调整,都是在信号输入的前端对信号进行处理,这就对前端的尺度变换和调制电路提出了较高的要求,而且通过调整前端的硬件电路成本高、效率低、实现方法复杂,大大降低了对任意未知信号检测的灵活性。此外也有部分学者通过调整系统参数<sup>[3,12-13]</sup>从而实现随机共振,但这些方法大多是假定一个参数固定的情况下<sup>[14-15]</sup>,多次调整另一个参数使输出信噪比达到最大值。这种方法只是单一的分析某一个系统参数的影响,这就可能造成对系统因素认识的片面性,同时仅对一个系统参数调整的耗时也将大于2个系统参数的同步调节,降低了参数调整的效率。

本文将分析双稳态SR系统参数 $a, b$ 对系统性能的影响,采用四阶龙格塔库算法对SR系统进行数值计算<sup>[16]</sup>,提出一种固定约束条件下可变系统参数的快速搜索方法。先通过分析影响输出信噪比的系统因素,得到了系统参数 $a, b$ 的约束条件,然后将使用快速搜索的方法,找到输出信噪比最大时的参数 $a, b$ ,从而实现优化双稳态系统的设计。

## 1 双稳态SR系统

### 1.1 双稳态SR原理

在非线性双稳态系统中,受到噪声 $N(t)$ 作用的微弱信号 $A\cos\omega t$ 可以用朗之万方程表示,即:

$$\dot{x} = ax - bx^3 + A\cos\omega t + N(t) \quad (1)$$

式中: $a, b$ 均大于0, $A\cos\omega t$ 是幅度为 $A$ ,频率为 $\omega$ 的微弱信号; $N(t)$ 表示满足高斯分布的白噪声,强度为 $D$ 、均值为0,其统计均值和自相关函数则分别为:

$$\langle N(t) \rangle = 0, \langle N(t)N(t+\tau) \rangle = 2D\delta(\tau) \quad (2)$$

非线性双稳态势函数为:

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \quad (a > 0, b > 0) \quad (3)$$

势函数的参数分别为 $a, b$ 。通过对 $V(x)$ 求一阶导数,可得当 $x = \pm\sqrt{a/b}$ 和 $x = 0$ 时 $V'(x)$

$= 0$ ,即势函数存在3个极值。通过对 $V(x)$ 求2阶导数可知,当 $x = 0$ 时, $V''(x) < 0$ ;当 $x = \pm\sqrt{a/b}$ 时, $V''(x) > 0$ ;由此可判定势函数 $V(x)$ 存在2个极小值和1个极大值,即表现为函数有2个势阱和1个势垒。2个势阱的位置分别为 $x_m = \pm\sqrt{a/b}$ ;势垒的位置为 $x_n = 0$ ;通过将 $x_m, x_n$ 代入势函数,可得势垒垒高 $\Delta V = a^2/4b$ 。将输入信号定为常数(即直流信号)代入式(1),且当势函数满足极点和拐点重合时,可解得系统临界值 $A_c = \sqrt{4a^3/27b}$ 。图1为非线性双稳态的势函数。

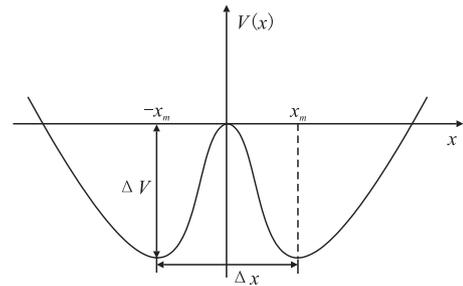


图1 双稳态随机共振的势函数

Fig.1 The potential function of bi-stable stochastic resonance

式(1)描述了单位质点同时受到外力和噪声的驱动时,在双势阱中作过阻尼运动。在没有信号和噪声输入时,质点的位置由初始状态决定,可在任何一个势阱内。当有幅度 $A > 0$ 的信号输入该系统时,系统将不再处于平衡状态,势阱会在信号 $A\cos\omega t$ 的驱动下发生频率为 $\omega$ 周期倾斜运动(相对势高交替的上升和下降)。如果 $A < A_c$ 质点仍能以输入信号频率 $\omega$ 在某个势阱内进行小范围的周期运动。当引入噪声后即使 $A < A_c$ ,因为噪声和外力的共同驱动,质点也将会从一个势阱跃迁到另一个势阱,将会形成随机共振现象。这种现象的本质是信号和噪声在非线性双稳态系统中发生了协同作用,此时噪声的能量将部分转化为信号的能量,使得输出信噪比明显增大。

### 1.2 双稳态系统参数分析

通过分析双稳态系统,发现影响产生随机共振的系统因素主要是:势垒垒高 $\Delta V = a^2/4b$ 和垒间距 $\Delta x = 2\sqrt{a/b}$ ,当输入信噪比一定时,只有相应的适当减小垒高(跃迁高度)和垒间距(跃迁宽度)才能更容易产生共振现象,但垒高过低将影响输出信噪比。下面将结合输出信噪比分析系统参数 $a, b$ 对随机共振的影响。

根据绝热近似理论,在稳态条件下,当 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时,有:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle x(t+\tau)x(t) | x_0, t_0 \rangle = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle = x_m^2 \exp(-2r_k |\tau|) [1 - \kappa(t)^2] + x_m^2 \kappa(t+\tau)\kappa(t) \quad (4)$$

式中:  $\kappa(t) = \frac{2r_k A x_m \cos(\omega_0 + \varphi)}{D(4r_k^2 + \omega_0^2)^{\frac{1}{2}}}$ 。为了计算外加周期信号输出功率谱,应先求出输出自相关函数的时域平均,系统输出的功率谱可由自相关函数作傅里叶变换求得,即:对式(6)进行傅里叶变换,得:

$$G(\omega) = G_N(\omega) + G_S(\omega) = \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{A x_m}{D} \right)^2 \frac{4r_k^2}{4r_k^2 + \omega_0^2} \right] + \frac{\pi}{2} \left( \frac{A x_m}{D} \right)^2 \frac{4r_k^2}{4r_k^2 + \omega_0^2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (5)$$

式(7)由 2 部分组成,一部分是由噪声引起的  $G_N(\omega)$ ,另一部分是由周期信号引起的与微弱信号同周期的成分  $G_S(\omega)$ 。为了方便地描述微弱周期信号的输出情况,将采用输出信噪比  $SNR = P_S/P_N$ ,

$$P_S = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} G_S(\omega) d\omega$$

因为系统输出的噪声为高斯白噪声所以在  $\omega = \omega_0$  处  $P_N = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} G_N(\omega) d\omega$ ,代入得:

$$SNR = \frac{\pi}{2} \left( \frac{A x_m}{D} \right)^2 r_k / \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{A x_m}{D} \right)^2 \frac{4r_k^2}{4r_k^2 + \omega_0^2} \right] \quad (6)$$

式中:  $x_m$  是双稳态系统的稳态;  $r_k$  为只有噪声  $N(t)$  作用且不存在周期激励时,质点在 2 个势阱间的 Kramers 跃迁率;  $A$  为微弱信号的幅度;  $D$  为噪声强度。

## 2 固定垒高条件下系统参数调节方法

### 2.1 基于噪声强度的参数约束条件

分析式(6),分母的高阶项为高阶无穷小项,趋近于 0,对输出信噪比结果的影响可以忽略,得:

$$SNR = \frac{\pi}{2} \left( \frac{A x_m}{D} \right)^2 r_k = \sqrt{2} \Delta V \left( \frac{A}{D} \right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \quad (7)$$

分析式(7)可知影响输出的因素有输入微弱信号幅度  $A$ 、噪声  $D$  和势垒垒高  $\Delta V$ ,当输入信号给定时,微弱信号幅度  $A$ 、噪声  $D$  为定值,要研究势垒垒高  $\Delta V$  对输出信噪比的影响。输出信噪比式(7)可简化为:

$$SNR = \sqrt{2} \Delta V \left( \frac{A}{D} \right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) = C_1 \Delta V \exp\left(-\frac{\Delta V}{C_2}\right) \quad (8)$$

式(8)中只有势垒垒高  $\Delta V$  是影响 SNR 的系统因素,为获取 SNR 的最大值,设  $\Delta V$  为因变量,对函数 SNR 求导,求得当  $\Delta V = D$  时函数 SNR 导数为 0。通过分析仿真图,  $\Delta V = D$  为函数 SNR 极大值点,结合前面分析为了满足起振条件可以适当的降低势垒垒高,但当势垒垒高  $\Delta V$  降低到一定程度时

将会影响输出信噪比,所以为得到最大的输出信噪比不能无限的降低势垒垒高  $\Delta V$ ,只有当  $\Delta V = D$  时,才会得到最大的输出信噪比。图 2 是当  $A$  等于 1 时,不同  $D$  值下 SNR 随  $\Delta V$  的变化曲线。

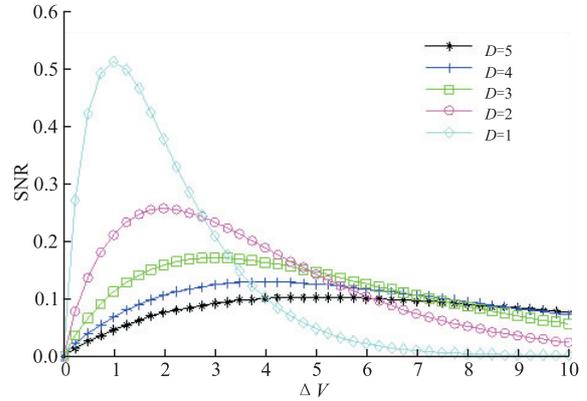


图 2 输出 SNR 随势垒垒高的变化

Fig.2 The output SNR change with the height of potential barrier

当微弱信号幅度  $A$  固定时,输出信噪比随着势垒垒高  $\Delta V$  的增加,先变大再减小,仿真结果证明了假设的正确性。微弱信号的幅度非常小,所以在通过积分来计算噪声的强度  $D$  时可以忽略微弱信号的影响。在给定输入信号的情况下可以求得噪声强度  $D$ ,这样就可以通过噪声强度  $D$  得到固定的势垒垒高,从而得到了  $a, b$  的约束条件:

$$\Delta V = D = a^2/4b \quad (9)$$

### 2.2 基于固定垒高的参数调节方法

在得到噪声强度的情况下,以  $\Delta V = D = a^2/4b$  为参数  $a, b$  的约束条件,是在仅考虑信号和噪声幅度条件下得到的,并不是参数  $a, b$  的确定条件。仅仅是在假定产生随机共振的情况下,输出信噪比与噪声强度匹配的最大值,即输入微弱信号满足小频率,实现了频率的匹配。但是实际中是无法确定输入信号的频率的,可能没有产生随机共振也可能仅产生“过共振”或“欠共振”,所以该信噪比还可以继续改善,将采用固定约束条件下参数优化。因为无法确定微弱信号的频率,采用连续调节参数  $a$  的方法继续增大输出信噪比 SNR 达到最优,从而得到参数  $a, b$  的确定条件,下面将分析参数与待检测信号频率的关系。

分析参数,引入变量代换,将  $y = x\sqrt{a/b}, \tau = at$  带入到式(1)中,得:

$$\frac{dy}{d\tau} = y - y^3 + \sqrt{\frac{b}{a^3}} A \cos\left(\frac{\omega}{a}\tau + \varphi\right) + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} N\left(\frac{\tau}{a}\right) \quad (10)$$

式(10)可以看出归一化后信号的频率变为原来的  $1/a$ 。发现参数  $a$  的选择对于高频信号的处理是非常重要的,所以在固定的势垒垒高  $\Delta V$  的情况下可以通过连续调节参数  $a$ ,使输出的信噪比不断

优化。通过建立约束条件下系统参数的调节,从而完成系统输出信噪比的最优化,清晰地将淹没在噪声中任意未知的微弱信号检测出来。

### 2.3 双稳态系统参数2次调节系统框图

基于输出信噪比最大的原则,建立系统参数2次调节模型:①根据噪声强度确定势垒全高  $\Delta V$ , 确定参数  $a, b$  约束条件;②在确定  $\Delta V = D = a^2/4b$  的条件下,连续调节  $a$  使输出信噪比达到最优。系统框图见图3。

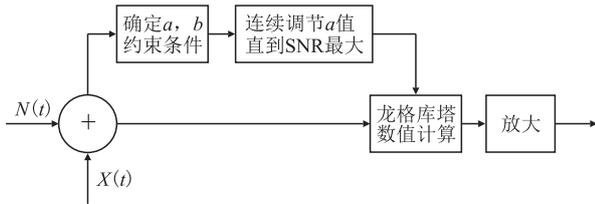


图3 双稳态系统参数2次调节系统框图

Fig.3 The system block diagram of bi-stable system parameters twice change

## 3 参数可调系统仿真分析

### 3.1 原始系统参数

当没有进行参数优化,噪声强度  $D = 5$ ,微弱信号幅度  $A = 0.1$  频率  $f = 0.02$  Hz时,任取系统参数  $a = 2, b = 4$ ,输入仿真结果见图4,输出仿真结果见图5。

在图5所示的频域内没有明显的功率谱峰值,此时说明没有产生随机共振现象,微弱信号已经完全淹没在噪声中。该仿真结果证明,当给定任意未知输入信号,未优化双稳态系统参数与被检测微弱信号“匹配”不会产生随机共振。

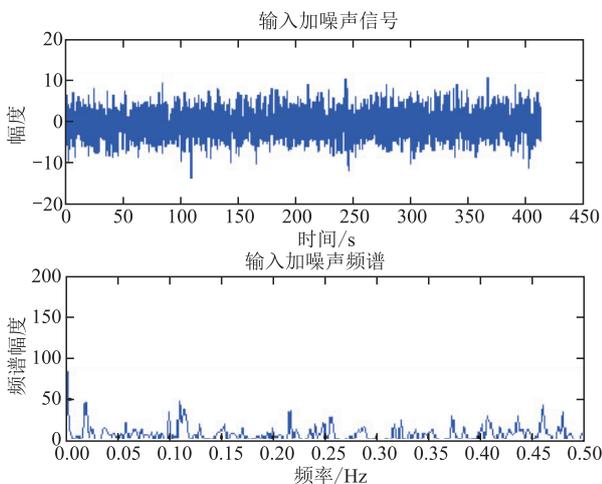


图4 输入信号加噪声的幅度和频谱

Fig.4 The amplitude and spectrum of input signal and noise

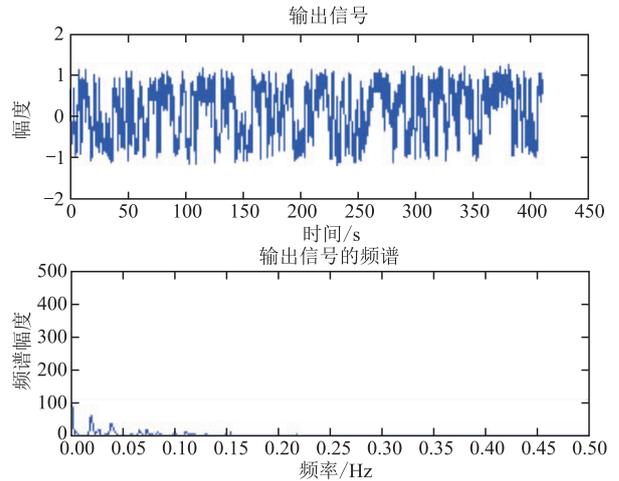


图5 输出信号的幅度和频谱

Fig.5 The amplitude and spectrum of output signal

### 3.2 一步优化仿真及分析

只进行一步优化,当参数  $D = 5.0, A = 0.2, f = 0.02$  Hz,  $a = 0.1, b = a^2/4D = 0.0005$  时,输出信号的时域和频域仿真见图6,当参数  $a = 0.3, b = a^2/4D = 0.0045$  其他条件不变时,输出信号的时域和频域仿真见图7。

图6在输出信号的频域内有明显的功率谱峰值,此时说明已经产生了随机共振现象,检测到了淹没在噪声中的微弱信号。

图7中,输出信号的频域内没有明显的峰值,此时没有产生随机共振现象,检测不到微弱信号。

通过分析可以发现,当仅仅进行一步优化,(即以  $\Delta V = D = a^2/4b$  为  $a, b$  的约束条件时)当参数选取不适合时将不会产生随机共振,同时分析可得  $a$  值对产生随机共振的影响灵敏度极高。要在建立约束条件情况下继续优化  $a$  值。

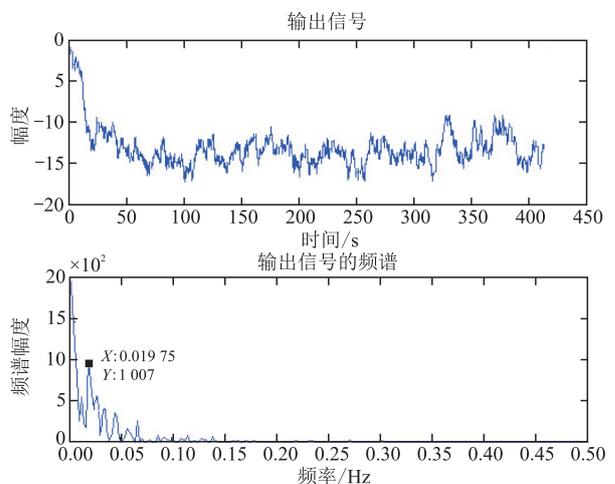


图6 产生随机共振的输出

Fig.6 The output of the stochastic resonance

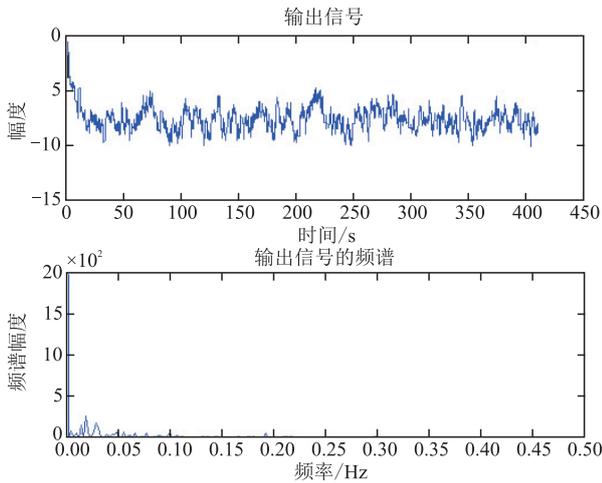


图 7 未产生随机共振的输出

Fig.7 The output of the non-stochastic resonance

### 3.3 2步优化仿真及对比分析

在约束条件下,连续调整参数  $a, b$  时,随着  $a$  的不断调整,输出信号频域内的频谱幅度峰值会继续增高,当  $a = 0.15, b = a^2/4D = 0.001\ 125$  时最优仿真结果见图 8。

通过仿真得到的最好情况见图 8,此时的频谱幅度为 1 963,较只进行一步优化时 1 007 有明显的提高,信噪比提高了 5.80 dB。此时说明在已经产生随机共振现象的基础上输出得到了优化,微弱信号的频谱特征得到了突出,通过参数的 2 次优化产生了最优的输出信噪比。

在相同的仿真条件下,本文的方法与文献[13]方法仿真对比结果如图 9,通过观察可发现不同频率下,建立约束条件下的优化产生的频谱峰值比文献[13]中的峰值高,经多次仿真计算,不同频率下信噪比平均提高 3.50 dB,同时低频的干扰还得到了有效的抑制。

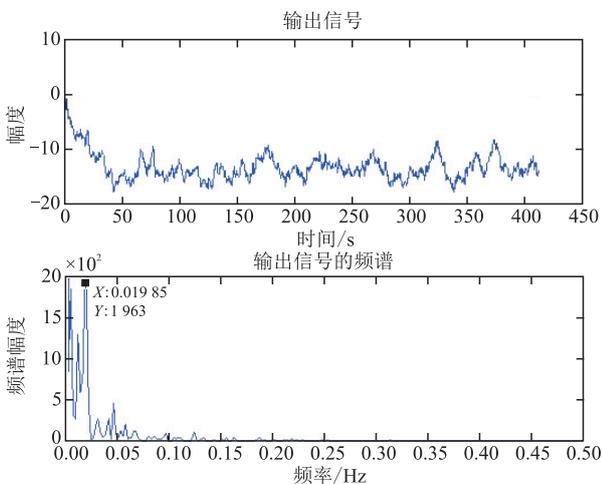


图 8 2次优化后的输出

Fig.8 The output after twice optimize

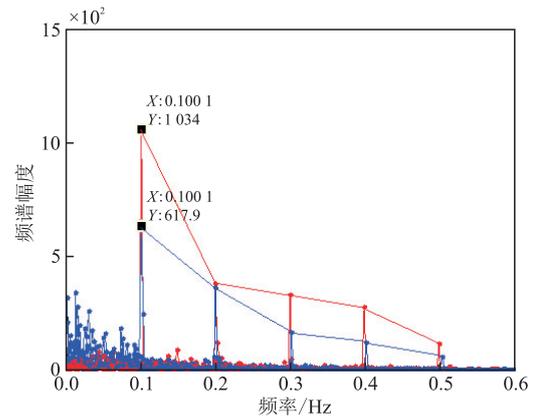


图 9 2种检测方法对比

Fig.9 Comparison of two kinds of detection method

### 3.4 2步优化在检测高频信号中应用

方法用于高频信号检测中,当  $D = 10, a = 20, b = a^2/4D = 10; A = 0.7, f = 2\ 000\ \text{Hz}$ ; 输入信号加噪声的幅度和频谱幅度仿真结果见图 10,输出信号加噪声的幅度和频谱幅度仿真结果见图 11。图 11 中在输出信号的频域内有多个峰值,无法得到要检测的微弱高频信号。说明此时很多低频干扰信号经过随机共振系统得到了放大,给准确检测微弱信号带来了干扰。

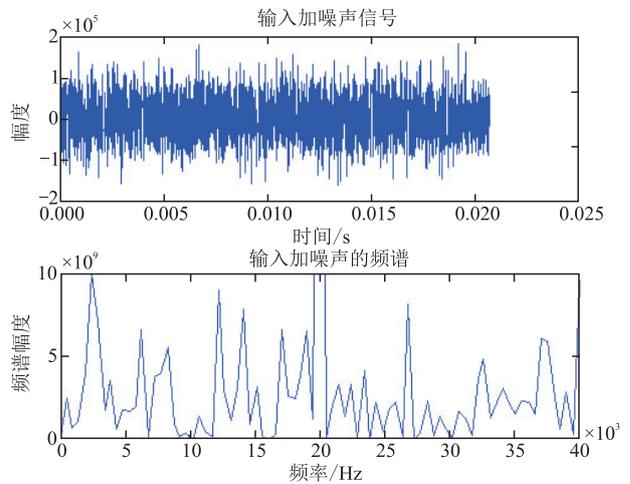


图 10 输入高频信号加噪声

Fig.10 Input high frequency signal and noise

为准确地检测到输入噪声中的高频微弱信号,将在已有的约束条件下 2 次调节系统参数,连续调节参数  $a$ ,在频域内产生了明显的单个频谱峰值,继续调节参数  $a$ ,随着  $a$  的变化,峰值先增加后减小,当  $a = 100, b = a^2/4D = 250$ ,其余参数条件不变,存在输出峰值的极值,见图 12。

在图 12 中,输出信号在频率为 2 006 Hz 处频谱幅度值为 241,此时相对于图 11,低频的干扰分量已经得到了有效的抑制,检测结果较明显,所检测到的频率与实际频率的相对误差为 0.3%。所以,这种 2 次参数调节模型对高频微弱信号的检测也是非常

适用的。此外,当噪声中存在多个频率的微弱信号时,也可采用并联频段参数调节的方式进行检测。

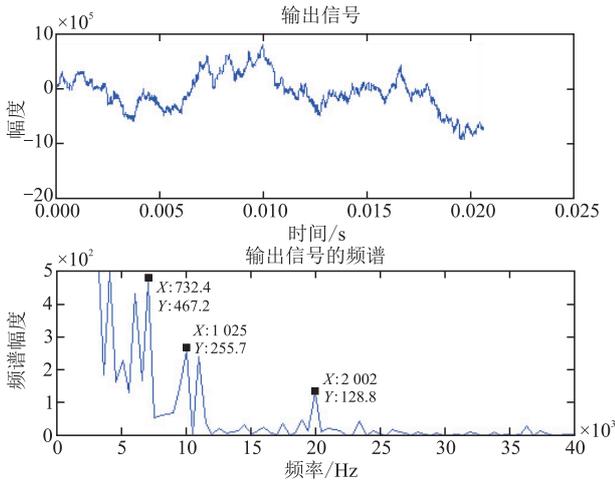


图 11 输出信号的幅度和频谱

Fig.11 The amplitude and spectrum of output signal

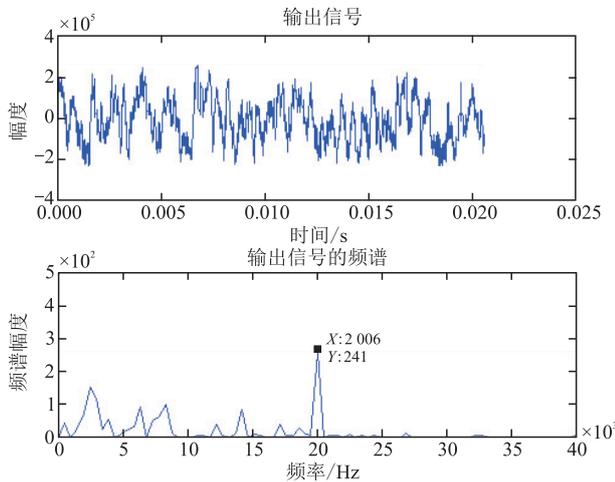


图 12 检测到高频微弱信号的输出

Fig.12 The output of the high frequency signal detection

### 4 结语

本文通过分析系统参数  $a, b$  对产生随机共振和输出信噪比的影响,提出了一种基于固定势垒  $\Delta V$  为约束条件的参数调节模型。通过这种 2 次调节系统参数的优化方式,解决了双稳态系统参数选取困难问题。实验中 2 次优化参数的方法比只进行 1 次优化的输出信噪比提高 5.80 dB,比文献[13]方法平均提高 3.50 dB。此外,实验快速检测到了频率为 2 000 Hz 的微弱信号,该方法对于检测高频率的微弱信号也是有效的,对高频微弱信号检测具有一定的推广价值。该模型能够对任意未知的微弱信号进行快速的检测,具有广泛的适用性,可以扩展应用到对微弱卫星信号的检测<sup>[17-18]</sup>,以及强噪声下信息质量评估。

### 参考文献(References):

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The Mechanism of Stochastic Resonance [J]. J Phys A, 1981, 14(11): 453-457.

[2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, et al. Stochastic Resonance in Climatic Change [J]. Tellus, 1982, 34(10): 10-16.

[3] 杨保国,田坦,张殿伦. 双稳态随机共振系统参数选择快速算法及应用[J]. 哈尔滨工程大学学报,2011, 32(3):282-287.  
YANG Baoguo, TIAN Tan, ZHANG Dianlun. A Fast Preference Algorithm for Bi-stable Stochastic Resonance Systems and Its Application [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2011, 32(3): 282-287.(in Chinese)

[4] 任立通,张建新,谢寿生,等. 基于随机共振的振动故障特征提取及可分性分析[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2013,14(4):9-13.  
REN Litong, ZHANG Jianxin, XIE Shousheng, et al. Vibration Fault Feature Extraction Based on Stochastic Resonance and Its Separability Research [J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2013, 14(4): 9-13.(in Chinese)

[5] Ko J Y, Otsuka K, Kubota T. Quantum-Noise-Induced Order in Lasers Placed in Chaotic Oscillation by Frequency-Shifted Feedback [J]. Phys Rev Lett, 2001.86(18):4025-4028.

[6] ZHANG Xiaofei, HU Niaoqing, HU Lei, et al. Multi-Scale Bistable Stochastic Resonance Array: A Novel Weak Signal Detection Method and Application in Machine Fault Diagnosis [J]. Science China: Technological Sciences, 2013, 56(9): 2115-2123.

[7] Mitaim S, Kosko B. Adaptive Stochastic Resonance [J]. Proc of the 1998 IEEE, 1998, 86(11): 2152-2183.

[8] 范剑,赵文礼,张明路,等. 随机共振动力学机理及其微弱信号检测方法的研究 [J]. 物理学报, 2014, 63(11): 110506(1-11).  
FAN Jian, ZHAO Wenli, ZHANG Minglu, et al. Nonlinear Dynamics of Stochastic Resonance and Its Application in the Method of Weak Signal Detection [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(11): 110506(1-11).(in Chinese)

[9] 彭勇波,李杰. 非线性随机振动分析的概率密度演化方法 [J]. 西南交通大学学报, 2014, 49(2): 220-226.

- PENG Yongbo, LI Jie. Probability Density Evolution Method of Nonlinear Random Vibration Analysis[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2014, 49(2):220-226.(in Chinese)
- [10] 林敏,黄咏梅.调制与解调用于随机共振的微弱周期信号检测[J].物理学报,2006,55(7):3276-3282.  
LIN Min, HUANG Yongmei. Modulation and Demodulation for Detecting Weak Periodic Signal of Stochastic Resonance [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(7):3276-3282.(in Chinese)
- [11] 樊养余,李利品,党瑞荣.基于随机共振的任意大频率微弱信号检测方法研究[J].仪器仪表学报,2014,34(3):566-572.  
FAN Yangyu, LI Lipin, DANG Ruirong. Study on High Frequency Weak Signal Detection Method Based on Stochastic Resonance[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2014, 34(3):566-572.(in Chinese)
- [12] 冷永刚.双稳调参高频共振机理[J].物理学报,2011,60(2):020503(1-7).  
LENG Yonggang. Mechanism of High Frequency Resonance of Parameter-Adjusted Bistable System [J]. Acta Physica Sinica, 2011,60(2):020503(1-7).(in Chinese)
- [13] 石硕,李谨言,顾学迈.双稳态系统中结构参数对系统性能的影响[J].科学技术与工程,2011,11(27):6631-6636.  
SHI Shuo, LI Jinyan, GU Xuemai. Effects of Structure Parameters on the Bistable System Performance [J]. Science Technology and Engineering, 2011,11(27):6631-6636.(in Chinese)
- [14] Peiming Shi, Xuejuan Ding, Dongying Han. Study on Multi-Frequency Weak Signal Detection Method Based on Stochastic Resonance Tuning by Multi-Scale Noise[J]. Measurement, 2014, 47(1):540-546.
- [15] V P Koverda, V N Skokov. Stochastic Resonance and Noise at Coupled Phase Transitions[J]. Physica A, 2014, 393(1):173-181.
- [16] Mitaim S, Ko B K. Detection of Weak Signals Using Adaptive Stochastic Resonance [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, IEEE, 1995:1332-1335.
- [17] 莫建文.弱信号环境下高性能GPS接收机关键技术研究[D].西安电子科技大学,2013.  
MO Jianwen. Research on the Key Techniques of GPS Receiver with High Performance in Weak Signal Environments[D]. Xi'an: Xidian University, 2013. (in Chinese)
- [18] 卢丹,吴仁彪,王磊.一种通用的GPS多类干扰抑制方法[J].信号处理,2010,26(5):682-686.  
LU Dan, WU Renbiao, WANG Lei. Unified Multitype Interference Suppression Algorithm for GPS[J]. Journal of Signal Processing, 2010, 26(5):682-686. (in Chinese)

(编辑:徐楠楠)