部分成员没有毁伤能力的随机格斗的获胜概率

袁修久，　刘梦阁，　赵学军
(空军工程大学理学院,西安,710051)

摘要　建立了一方全部成员具有毁伤能力,另一方部分成员具有毁伤能力的随机格斗模型。在双方随机瞄准的条件下,分别就进攻方分组和不分组的情况建立了格斗双方的状态概率微分方程组。在不同的作战停止规则下,给出了进攻方分组和不分组情况下进攻方获胜、防御方防御成功以及出现和局的概率递推算法。在进攻方分组的条件下,证明了不同作战停止规则下获胜概率的性质,不同的作战停止规则导致获胜概率的性质有较大差异。在进攻方不分组与分组的情况下,通过具体数值例子比较进攻方的不同参数下的获胜概率,结果发现没有一种进攻方案绝对占优。

关键词　随机格斗模型;获胜概率;毁伤概率
DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2015.06.016
中图分类号　TP391.9　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2015)06-0074-05

The Probability of Wining of Stochastic Duel of One Side with Some Members not Having Ability to Attack

YUAN Xiujiu, LIU Mengge, ZHAO Xuejun
(Science College, Air Force Engineering university, Xi'an 710051, China)

Abstract: The stochastic duel models between two forces that on one side all members have ability to attack and on the other side some members do not have the ability to attack are established. Under the condition of stochastic aiming, the differential equations of state probability of the grouped and not grouped offensive side are established. Under the different combat termination decision rules, the algorithms for the probability of wining of the grouped and not grouped offensive side, the probability of successful defense of defense side and the probability of the draw of two side based on recursive formulae are given. In the cases that offensive side grouped, the properties of the probability of winning are proved under the conditions of different combat termination decision rules. Different combat termination decision rules result in a very different property of probability of winning of offensive side. Through the concrete numerical example probabilities of winning with different parameters of the grouped and not grouped offensive side are compared. The results show that there is not a attack scenario which is the absolute dominant.

Key words: stochastic duel model; the probability of winning; the kill probability

收稿日期:2015-05-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11371369);陕西省电子信息系统综合集成重点实验室基金资助项目(20112D005)
作者简介:袁修久(1966-),男,陕西旬阳人,教授,主要从事系统仿真研究.E-mail:yuanxiujiu@sohu.com

引用格式:*袁修久,刘梦阁,赵学军. 部分成员没有毁伤能力的随机格斗的获胜概率[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2015,16(6):74-78. YUAN Xiujiu, LIU Mengge, ZHAO Xuejun. The Probability of Wining of Stochastic Duel of One Side with Some Members not Having Ability to Attack[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2015, 16(6): 74-78.*

20 世纪 60 年代起，Williams 和 Ancker[1] 等学者开始用随机分析方法研究格斗双方的获胜概率，逐渐形成了随机格斗理论。文献[2～8]研究了二对一、二对二、多对一以及多对多的随机格斗模型。这些文献一般先计算状态转移概率函数，然后计算双方的各种数字特征。文献[9]把随机格斗模型推广到了作战一方为游击队的情况，给出了作战双方获胜概率的计算方法。文献[10]在随机瞄准的假定下，给出了每一方作战兵器相同的随机格斗的获胜概率递推公式。

经典随机格斗模型的一个基本假定是作战双方所有成员都具有毁伤对方的能力。然而在某些作战中，一方只有部分成员具有毁伤对方的能力，而另外一部分成员不具有该能力。如空对地作战中，很多情况下，地面目标没有毁伤能力，但它配有防空火力。本文针对作战双方一方的部分成员具有毁伤能力，而另一方部分成员没有毁伤能力的情况，建立了一种新的随机格斗模型，基于递推公式给出了计算双方获胜概率的算法。

1　基本假设

假定作战的双方为 A 和 B 。A 方的每一成员都具有发现毁伤对方成员的能力，B 方只有部分成员具有该能力，称为作战单元，把不具有该能力的成员称为被动目标。

假定 A 方作战目的是毁伤 B 方被动目标。B 方作战目的是消灭 A 方作战单元、保护己方被动目标。A 方的作战单元类型相同。B 方的被动目标的类型相同，B 方的所有作战单元的类型也相同。双方作战单元火力发射间隔时间服从相同指数分布。同一作战单元不同次发射间隔时间及不同作战单元发射间隔时间独立。双方弹药数量无限。每一个作战单元随机攻击对方目标。在作战中，A 方毁伤 B 方全部被动目标后，一种情况是立即退出战斗，另一种情况是仍在 B 方的火力范围内，需同 B 方继续作战。因此本文考虑 2 种战斗停止条件：① B 方的全部被动目标被毁伤或者 A 方的所有作战单元被毁伤，战斗停止；② B 方全部被动目标和作战单元被毁伤或 A 方所有作战单元被毁伤，战斗停止。

战斗结束时，如果 B 方的被动目标全部被毁伤，而 A 方有生存作战单元，不论 B 方是否有生存作战单元，认为 A 方胜；如果 A 方的全部作战单元被毁伤，B 方有生存被动目标，认为 B 方防御成功；如果 A 方的全部作战单元及 B 方的全部被动目标被毁伤，认为战斗为和局。

2　A 方分组的随机格斗模型

A 方把作战单元分成 2 组，A_1 用于攻击 B 方的被动目标 B_1，A_2 用于攻击 B 方作战单元 B_2。

λ_{BA} 为单位时间内 B 方一个作战单元对 A 方作战单元毁伤数。λ_{AB}^1 ，λ_{AB}^2 分别是 A 方一个作战单元对 B 方被动目标和作战单元毁伤数。

(i_1,i_2,j,k) 是 A 方的 2 组作战单元、B 方的被动目标和作战单元在 t 时刻的状态。

2.1　状态概率的微分方程模型

假设 A 方的 2 组初始作战单元数分别为 a ，b ；B 方的初始作战单元数为 c ，初始被动目标数为 d ，从而初始状态概率 $P_{(a,b,c,d)}^{(0)}=1$。由于 B 方的一个作战单元每次对 A 方的每一个作战单元的攻击概率是相同的，所以在战斗停止条件 1 下，Δt 时间内 A 方 A_1 作战单元被毁伤的概率为：

$$P_{(i_1+1,i_2,j,k)(i_1,i_2,j,k)}^{(\Delta t)}=\frac{k(i_1+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1}\Delta t+o(\Delta t)$$

同理可得 Δt 时间内其它的状态状移概率表达式。

由此可得战斗停止条件①下，状态概率满足的微分方程组为：

$$\begin{cases}P'^{(t)}_{(i_1,i_2,j,k)}+(k\lambda_{BA}+i_1\lambda_{AB}^1+i_2\lambda_{AB}^2)P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,k)}= \\ (\dfrac{k(i_1+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1})P^{(t)}_{(i_1+1,i_2,j,k)}+ \\ (\dfrac{k(i_2+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1})P^{(t)}_{(i_1,i_2+1,j,k)}+ \\ (i_1\lambda_{AB}^1)P^{(t)}_{(i_1,i_2,j+1,k)}+(i_2\lambda_{AB}^2)P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,k+1)}, \\ i_1=0,1,2,\cdots,a;i_2=0,1,2,\cdots,b;j=1,2,\cdots,c; \\ k=1,2,\cdots,d;\text{且 } i_1,i_2 \text{ 中最多有一个为 0。} \\ P'^{(t)}_{(i_1,i_2,0,k)}=(i_1\lambda_{AB}^1)P^{(t)}_{(i_1,i_2,1,k)}, \\ P'^{(t)}_{(i_1,i_2,j,0)}+(i_1+i_2)\lambda_{AB}^1P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,0)}= \\ (i_2\lambda_{AB}^2)P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,1)}+(i_1+i_2)\lambda_{AB}^1P^{(t)}_{(i_1,i_2,j+1,0)}, \\ P'^{(t)}_{(i_1,0,0,k)}=(i_1\lambda_{AB}^1)P^{(t)}_{(i_1,0,1,k)}, \\ P'^{(t)}_{(0,0,j,k)}=(k\lambda_{BA})P^{(t)}_{(1,0,j,k)}+(k\lambda_{BA})P^{(t)}_{(0,1,j,k)}, \\ i_1=1,2,\cdots,a;i_2=0,1,\cdots,b;j=1,2,\cdots,c; \\ i_1+i_2=1,2,\cdots,a+b;k=1,2,\cdots,d\text{。} \\ P^{(t)}_{(a,b,c,d)}+(a\lambda_{AB}^1+b\lambda_{AB}^2+d\lambda_{BA})P^{(t)}_{(a,b,c,d)}=0\text{。}\end{cases} \tag{1}$$

在战斗停止条件②下，状态概率满足的微分方程组见式(2)，双方初始兵力较少时，方程组(1)、(2)能够解出解析解。但当初始兵力较多时，解析解的表达式很复杂，写出来也没有办法使用，可采用递推的方法解对应的差分方程。在双方初始兵力较多时，从方程组(1)、(2)出发计算获胜概率的计算量很大。本文给出另一种计算获胜概率的方法。

$$\begin{cases}
P'^{(t)}_{(i_1,i_2,j,k)}+(k\lambda_{BA}+i_1\lambda^1_{AB}+i_2\lambda^2_{AB})P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,k)}= \\
(\frac{k(i_1+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1})P^{(t)}_{(i_1+1,i_2,j,k)}+(\frac{k(i_2+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1})P^{(t)}_{(i_1,i_2+1,j,k)}+ \\
(i_1\lambda^1_{AB})P^{(t)}_{(i_1,i_2,j+1,k)}+(i_2\lambda^2_{AB})P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,k+1)}, \\
i_1=0,1,2,\cdots,a;i_2=0,1,2,\cdots,b;j=1,2,\cdots,c; \\
k=1,2,\cdots,d;\text{且 } i_1,i_2 \text{ 中最多有一个为 } 0。 \\
P'^{(t)}_{(i_1,i_2,0,k)}+[k\lambda_{BA}+(i_1+i_2)\lambda^2_{AB}]P^{(t)}_{(i_1,i_2,0,k)}= \\
(i_1\lambda^1_{AB})P^{(t)}_{(i_1,i_2,1,k)}+(i_1+i_2)\lambda^2_{AB}P^{(t)}_{(i_1,i_2,0,k+1)}+ \\
(\frac{k(i_1+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1})P^{(t)}_{(i_1+1,i_2,0,k)}+ \\
(\frac{k(i_2+1)\lambda_{BA}}{i_1+i_2+1})P^{(t)}_{(i_1,i_2+1,0,k)} \\
P'^{(t)}_{(i_1,i_2,j,0)}+(i_1+i_2)\lambda^1_{AB}P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,0)}=(i_2\lambda^2_{AB})P^{(t)}_{(i_1,i_2,j,1)}+ \\
(i_1+i_2)\lambda^1_{AB}P^{(t)}_{(i_1,i_2,j+1,0)}, \\
i_1+i_2=1,2,\cdots,a+b;k=1,2,\cdots,d;j=1,2,\cdots,c \\
P'^{(t)}_{(i_1,0,0,k)}+(k\lambda_{BA}+i_1\lambda^2_{AB})P^{(t)}_{(i_1,0,0,k)}=(k\lambda_{BA})P^{(t)}_{(i_1+1,0,0,k)}+ \\
(i_1\lambda^1_{AB})P^{(t)}_{(i_1,0,1,k)}+(\frac{k}{i_1+1})\lambda_{BA}P^{(t)}_{(i_1,1,0,k)}+ \\
(i_1\lambda^2_{AB})P^{(t)}_{(i_1,0,0,k+1)}, \\
P'^{(t)}_{(0,0,j,k)}=(k\lambda_{BA})P^{(t)}_{(1,0,j,k)}+(k\lambda_{BA})P^{(t)}_{(0,1,j,k)}, \\
i_1=1,2,\cdots,a;j=1,2,\cdots,c;k=1,2,\cdots,d \\
P'^{(t)}_{(a,b,c,d)}+(a\lambda^1_{AB}+b\lambda^2_{AB}+d\lambda_{BA})P^{(t)}_{(a,b,c,d)}=0。
\end{cases} \tag{2}$$

2.2 A 方的获胜概率

如果 A_1,A_2 剩余的作战单元为 x、y ,B 方剩余的单元为 u、v ,A 方和 B 方的作战称为 (x,y):(u,v) 格斗。

A 方获胜概率 $P_A(x,y,u,v)$ 满足递推方程:

$$\begin{aligned}
P_A(x,y,u,v)=\xi(x,y,u,v)P_A(x,y,u-1,v)+ \\
\eta(x,y,u,v)P_A(x,y,u,v-1)+ \\
\gamma(x,y,u,v)P_A(x-1,y,u,v)+ \\
\theta(x,y,u,v)P_A(x,y-1,u,v) \\
x=1,2,\cdots,a;y=1,2,\cdots,b; \\
u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d。
\end{aligned} \tag{3}$$

式中:$\xi(x,y,u,v)$,$\eta(x,y,u,v)$,$\gamma(x,y,u,v)$,$\theta(x,y,u,v)$ 分别是 (x,y):(u,v) 格斗中 B_1,B_2 单元、A_1,A_2 单元首次出现毁伤的概率。

因每个作战单元不同次发射火力间隔时间独立,且呈相同指数分布,不同作战单元发射火力间隔时间独立,所以 A_1 中 x 个作战单元中有一个作战单元 A_{k0} 首先毁伤 B_1 的概率为:

$$P_{k0}=P\{T^1_{AB_{k0}}<\min(T^1_{AB_k},T^2_{AB_l},T_{BA_p},k\neq k_0,k=1,2,\cdots,x;l=1,2,\cdots,y;p=1,2,\cdots,v)\}$$

$$=\frac{\lambda^1_{AB}}{x\lambda^1_{AB}+y\lambda^2_{AB}+v\lambda_{BA}}。$$

式中:$T^1_{AB_k}$,$T^2_{AB_l}$ 分别为 A_1 中第 k 个作战单元,A_2 中第 j 个作战单元首先毁伤 B_1,B_2 的时间;T_{BA_p} 为 B 方第 p 个作战单元首先毁伤 A_1 的时间。

A 方 x 个作战单元中,每一个作战单元都有可能首先毁伤被动目标,所以:

$\xi(x,y,u,v)=\frac{x\rho_1}{x\rho_1+y\rho_2+v}$,其中:$\rho_1=\frac{\lambda^1_{AB}}{\lambda_{BA}}$,$\rho_2=\frac{\lambda^2_{AB}}{\lambda_{BA}}$。同理中计算 η(x,y,u,v),γ(x,y,u,v),θ(x,y,u,v)。从而有:

$$\begin{aligned}
P_A(x,y,u,v)=\frac{x\rho_1}{x\rho_1+y\rho_2+v}P_A(x,y,u-1,v)+ \\
\frac{y\rho_2}{x\rho_1+y\rho_2+v}P_A(x,y,u,v-1)+ \\
\frac{xv}{(x+y)(x\rho_1+y\rho_2+v)}P_A(x-1,y,u,v)+ \\
\frac{vy}{(x+y)(x\rho_1+y\rho_2+v)}P_A(x,y-1,u,v)
\end{aligned} \tag{4}$$

经过一段时间战斗后,4 个状态 $(x,0,u,v)$,$(0,y,u,v)$,$(x,y,0,v)$,$(x,y,u,0)$ 中的一个必然出现。

对于状态 $(0,y,u,v)$,A_2 有生存作战单元,B 方有生存被动目标,按假定 A_2 继续同 B_2 作战。如果 B_2 全部被毁伤,则剩下的 A 方作战单元将全部用于毁伤 B_1,直到 B_1 被全部毁伤,战斗停止;如果 A_2 被全部毁伤,战斗停止。通过式(5)递推计算 A 方获胜的概率:

$$\begin{cases}
P_A(0,y,u,v)=\frac{\rho_2 y}{\rho_2 y+v}P_A(0,y,u,v-1)+ \\
\qquad \frac{v}{\rho_2 y+v}P_A(0,y-1,u,v) \\
\text{边界条件为:} \\
P_A(0,y,u,0)=1;\ P_A(0,0,u,v)=0 \\
y=1,2,\cdots,b;\ u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d
\end{cases} \tag{5}$$

对于状态 $(x,y,0,v)$,B_1 已经被消灭,如果使用战斗停止条件①,则:

$$\begin{cases}
P_A(x,y,0,v)=1 \\
x=0,1,\cdots,a;y=0,1,\cdots,b;v=0,1,\cdots d \\
\text{且 } x,y \text{ 中最多只有一个为 } 0
\end{cases} \tag{6}$$

如果使用战斗停止条件②,通过下列递推方程(7)求 A 方获胜的概率 $P_A(x,y,0,v)$。

定义 $P_A(x,y,0,v)=P_A(x+y,v)$,则:

$$\begin{cases} P_A(x+y,v)=\dfrac{(x+y)\rho_2}{(x+y)\rho_2+v}P_A(x+y,v-1)+ \\ \dfrac{v}{(x+y)\rho_2+v}P_A(x+y-1,v) \\ \text{边界条件为：} \\ P_A(0,v)=0;\ P_A(x+y,0)=1。 \\ x+y=1,2,\cdots,a+b;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{7}$$

对于状态 $(x,0,u,v)$，按条件①，如果 B_2 被毁伤后，战斗停止。如果 A 方作战单元被毁伤，战斗也停止。和式(4)类似的推导可得：

$$\begin{cases} P_A(x,0,u,v)=\dfrac{x\rho_1}{x\rho_1+v}P_A(x,0,u-1,v)+ \\ \qquad \dfrac{v}{x\rho_1+v}P_A(x-1,0,u,v) \\ \text{边界条件为：} \\ P_A(0,0,u,v)=0;\ P_A(x,0,0,v)=1; \\ x=1,2,\cdots,a;u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{8}$$

按条件①，通过下面递推方程(9)求 A 方获胜概率 $P_A(x,0,u,v)$。

$$\begin{cases} P_A(x,0,u,v)=\dfrac{x\rho_1}{x\rho_1+v}P_A(x,0,u-1,v)+ \\ \qquad \dfrac{v}{x\rho_1+v}P_A(x-1,0,u,v) \\ P_A(0,0,u,v)=0 \\ P_A(x,0,0,v)=\dfrac{x\rho_1}{x\rho_1+v}P_A(x,0,0,v-1)+ \\ \qquad \dfrac{v}{x\rho_1+v}P_A(x-1,0,0,v) \\ P_A(x,0,0,0)=1;\ P_A(0,0,0,v)=0; \\ x=1,2,\cdots,a;u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{9}$$

对于状态 $(x,y,u,0)$：

$$\begin{cases} P_A(x,y,u,0)=1,x=1,2,\cdots,a \\ \quad y=1,2,\cdots,b;u=1,2,\cdots,c \end{cases} \tag{10}$$

使用式(4)、(5)、(6)、(8)、(10)可以计算出战斗停止条件①下 A 方获胜的概率；使用(4)、(5)、(7)、(9)、(10)式可以计算出战斗停止条件②下 A 方获胜的概率。

2.3　B 方防御成功概率

战斗停止条件②下 B 方防御成功概率相同把式(4)中的 P 的下标换成 B 时可得到 B 方防御成功的概率 $P_B(x,y,u,v)$ 的递推方程。

在递推过程中，需要计算出现状态 $(x,0,u,v)$，$(0,y,u,v)$，$(x,y,0,v)$，$(x,y,u,0)$ 时，B 方防御成功概率。这些概率分别用式(11)，(12)，(13)，(14)计算。

$$\begin{cases} P_B(0,y,u,v)=\dfrac{\rho_2 y}{\rho_2 y+v}P_B(0,y,u,v-1)+ \\ \qquad \dfrac{v}{\rho_2 y+v}P_B(0,y-1,u,v) \\ \text{边界条件为：} \\ P_B(0,y,u,0)=0;\ P_B(0,0,u,v)=1; \\ y=1,2,\cdots,b;u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} P_B(x,0,u,v)=\dfrac{\rho_1 x}{\rho_1 x+v}P_B(x,0,u-1,v)+ \\ \qquad \dfrac{v}{\rho_1 y+v}P_B(x-1,0,u,v)。 \\ P_B(x,0,0,v)=0;\ P_B(0,0,u,v)=1。 \\ x=1,2,\cdots,a;u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} P_B(x,y,0,v)=0。 \\ x=1,2,\cdots,a;y=1,2,\cdots,b,v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} P_B(x,y,u,0)=0 \\ x=1,2,\cdots,a;y=1,2,\cdots,b;u=1,2,\cdots,c \end{cases} \tag{14}$$

2.4　双方出现和局的概率

使用战斗停止条件 2 战斗有可能出现和局。把式(4)中下标换 AB，就得到了和局概率 $P_{AB}(x,y,u,v)$ 的递推公式。

在递推过程中，需要计算出现状态 $(x,0,u,v)$，$(0,y,u,v)$，$(x,y,0,v)$，$(x,y,u,0)$ 时，战斗出现和局的概率。这些概率分别用式(15)，(16)，(17)，(18)计算。

$$\begin{cases} P_{AB}(x,0,u,v)=\dfrac{x\rho_1}{x\rho_1+v}P_{AB}(x,0,u-1,v)+ \\ \qquad \dfrac{v}{x\rho_1+v}P_{AB}(x-1,0,u,v), \\ P_{AB}(0,0,u,v)=0。 \\ P_{AB}(x,0,0,v)=\dfrac{x\rho_2}{x\rho_2+v}P_{AB}(x,0,0,v-1)+ \\ \qquad \dfrac{v}{x\rho_2+v}P_{AB}(x-1,0,0,v), \\ P_{AB}(x,0,0,0)=0;\ P_{AB}(0,0,0,v)=1; \\ x=1,2,\cdots,a;u=1,2,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} P_{AB}(0,y,u,v)=0 \\ y=1,2,\cdots,b;u=1,\cdots,c;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} P_{AB}(x,y,u,0)=0 \\ x+y=1,2,\cdots,a+b;u=1,2,\cdots,c \end{cases} \tag{17}$$

$P_{AB}(x,y,0,v)$ 按下面的递推公式计算。

定义 $P_{AB}(x+y,v)=P_{AB}(x,y,0,v)$，则：

$$\begin{cases} P_{AB}(x+y,v)=\dfrac{(x+y)\rho_2}{(x+y)\rho_2+v}P_{AB}(x+y,v-1)+ \\ \qquad \dfrac{v}{(x+y)\rho_2+v}P_{AB}(x+y-1,v) \\ \text{边界条件为：} \\ P_{AB}(0,v)=1;\ P_{AB}(x+y,0)=0; \\ x+y=1,2,\cdots,a+b;v=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{18}$$

3 A 方不分组的获胜概率计算

3.1 A 方对 B 方攻击不区分被动目标和作战单元

A 方的每个作战单元向 B_1，B_2 随机地进行攻击，A 方的作战单元不分组。

通过下列递推方程(19)求 A 方获胜概率：

$$P_A(x,y,z)=\frac{xy\rho_1}{xy\rho_1+xz\rho_2+z(y+z)}P_A(x,y-1,z)+ \frac{xz\rho_2}{xy\rho_1+xz\rho_2+z(y+z)}P_A(x,y,z-1)+ \frac{z(y+z)}{xy\rho_1+xz\rho_2+z(y+z)}P_A(x-1,y,z) \tag{19}$$

在战斗停止条件①，边界条件为：

$$\begin{cases} P_A(0,y,z)=0,P_A(x,y,0)=1,P_A(x,0,z)=1; \\ x=1,2,\cdots,a+b,y=1,2,\cdots,c;z=1,2,\cdots,d。\end{cases} \tag{20}$$

在战斗停止条件②下，使用递推方程(21)，需要计算出现状态 $(0,y,z)$，$(x,y,0)$，$(x,0,z)$ 时，A 方获胜的概率，这些概率使用式(21)～(22)计算：

$$\begin{cases} P_A(0,y,z)=0,P_A(x,y,0)=1 \\ x=1,2,\cdots,a+b;y=1,2,\cdots,c;z=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} P_A(x,0,z)=\dfrac{\rho_2 x}{\rho_2 x+z}P_A(x,0,z-1)+ \\ \qquad \dfrac{z}{\rho_2 x+z}P_A(x-1,0,z) \\ P_A(0,0,z)=0;\ P_A(x,0,0)=1; \\ x=1,2,\cdots,a+b;z=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{22}$$

3.2 A 方攻击 B 方区分被动目标和作战单元

作战开始时，A 方首先用全部作战单元毁伤 B_2。如果 B_2 全部被毁伤，A 方用剩余的作战单元毁伤 B_1，直到全部毁伤。如果 A 方作战单元被全部毁伤，战斗停止。通过下列递推方程(23)计算 A 方获胜的概率 $P^A(a+b,c,d)$：

$$\begin{cases} P^A(x,c,z)=\dfrac{x\rho_2}{x\rho_2+z}P^A(x,c,z-1)+ \\ \qquad \dfrac{z}{x\rho_2+z}P^A(x-1,c,z) \\ P^A(0,c,z)=0;P^A(x,c,0)=1; \\ x=1,2,\cdots,a+b;z=1,2,\cdots,d \end{cases} \tag{23}$$

利用式(4)、(6)、(7)、(10)可以证明下面定理。

定理 在战斗停止条件①下，

$$\lim_{\rho_1\to+\infty}P_A(x,y,u,v)=1。$$

2)在战斗停止条件②下：

$$\lim_{\rho_1\to+\infty}P_A(x,y,u,v)= \rho_2^v\sum_{j=1}^{x+y}\frac{(-1)^{x+y-j}j^{(x+y+v)}\Gamma(\rho_2 j+1)}{(x+y-j)!\ j!\ \Gamma(v+\rho_2 j+1)}$$

因此，在 A 方分组进攻的条件下，不同的战斗停止条件可能导致获胜概率的性质不同：在条件①下，不断增大 A 方毁伤被动目标的能力，可以使 A 方获胜的概率接近于 1。在条件②下，仅仅不断提高毁伤被动目标的能力不能使得 A 方获胜的概率接近于 1。

4 算例

A 方有 2 个作战单元，B 方有 2 个被动目标和 1 个作战单元。A 方分组攻击 B 方，用式(4)、(5)、(6)、(8)、(10)算得 A 方的获胜概率为：

$$\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2+1}\left(1-\frac{1}{2(\rho_2+1)}\frac{1}{\rho_1+\rho_2+1}-\frac{1}{2(\rho_1+1)}\frac{1}{\rho_1+\rho_2+1}\right)+ \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2+1}+\frac{1}{2(\rho_2+1)}\frac{1}{\rho_1+\rho_2+1}+\frac{1}{2(\rho_2+1)}\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2+1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right) \tag{24}$$

同理中算出 A 方不分组情况，A 方对 B 方攻击区分被动目标与作战单元，以及不区分被动目标和作战单元，A 方获胜的概率。

图 1 给出了 A 方在 3 种攻击策略下的获胜概率随 ρ_2 增大时概率的变化曲线。可以看出，没有一种进攻方案在任何情况下获胜概率绝对占优。

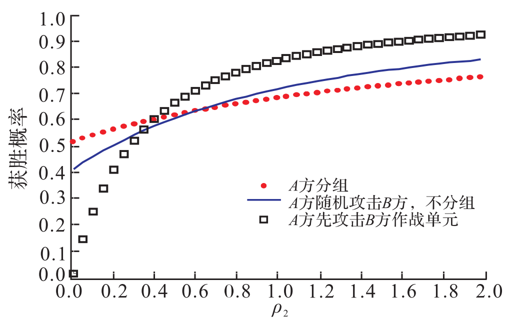

图 1 不同进攻方案下的获胜概率

Fig.1 Probabilities of winning under different attack scenarios

(下转第 83 页)