第 14 卷第 5 期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol.14 No.5
2013 年 10 月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Oct.2013

基于位置参数二分法控制的信号稀疏分解

李炳杰, 马青海, 闫 龙
(空军工程大学理学院,陕西西安,710051)

摘要 研究基于匹配追踪方法实现的信号稀疏分解算法。通过对信号稀疏分解中使用的过完备原子库的结构特性分析,找到中心位置,构造时频原子库,利用二分法控制中心位置参数,将信号快速稀疏分解,应用于基于中心位置参数的改进贪婪匹配追踪算法。该算法与匹配追踪相比,计算速度大约提高了 36 倍,降低了计算复杂度,提高了稀疏分解的精度。通过对仿真数据的处理验证了所提方法的可行性和有效性。

关键词 压缩感知;稀疏分解;冗余字典;MP 算法;二分法
DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2013.05.021
中图分类号 TN911.72 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2013)05-0089-03

Dichotomy Control of Positional parameter Based Signal Sparse Decomposition

LI Bing-jie, MA Qing-hai, YAN Long
(Science College, Air Force Engineering University, Xi′an, 710051, China)

Abstract: After the study of Matching Pursuit (MP) based signal sparse decomposition, analysis of structural property of the over-complete atom dictionary used in signal sparse decomposition is made, this paper creates frequency atom dictionary after seeking out centric position, dichotomy control of positional parameter based signal sparse decomposition algorithm is presented, applying to improved MP algorithm based on centric position parameter . The calculating speed of the algorithm in this paper increase by about 36 times compared with MP algorithm .This algorithm can reduce the computation complexity and improve the precision of sparse decomposition. Finally the simulation data processing verified that the proposed algorithm is effective and corrective.

Key words: compressed sensing; sparse decomposition; redundant dictionary; MP algorithm; dichotomy

信号在冗余字典下稀疏表示的研究集中在 2 个方面[1]:① 如何构造一个适合某一类信号的冗余字典;② 如何设计快速有效的稀疏分解算法。目前较流行的信号稀疏表示方法多数基于稀疏变换[2],例如:多尺度几何分析、[3-5]基于快速傅里叶变换的匹配追踪的快速算法[6]、基追踪算法[7]、贪婪匹配追踪算法[8]、正交匹配追踪算法[9]、分段正交匹配追踪[10-11]算法等。本文受文献[6]的启发,基于新的稀疏分解思想,提出基于中心位置参数的改进贪婪匹配追踪算法。

1 信号的稀疏表示

信号可以通过加入冗余来实现稀疏化,因而出现一种被称为过完备原子库的冗余系统。设过完备字典库(Over Complete Dictionary, OCD)$\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{d}_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$是希尔伯特空间 $\mathbf{R}^N$ 上的一个集合,$\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^N$ 是原始信号,如何从 $\boldsymbol{D}$ 中找到一组原子 $\boldsymbol{D}^*=d_m$, $m=1,2,\cdots,K$,使原始信号 $\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^N$ 用其线性表示,即信

收稿日期:2013-04-01
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2011JM8031)
作者简介:李炳杰(1963-),男,甘肃会宁人,教授,主要从事最优控制数值算法以及最优化理论研究.
E-mail:libingjie45@yahoo.com.cn

号稀疏表示问题。为使 $\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^N$ 的逼近达到最佳效果,稀疏分解算法需要在过完备字典库中选择最优的原子 $\boldsymbol{D}^*$。

设 $\Gamma=\{1, 2, \cdots, M\}$,$M\gg N\gg K$,选择最优原子的问题可归结为:

$$\min\|\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{d}\rangle\|_0, \text{ s.t. } \boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{M}\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{d}_i\rangle \boldsymbol{d}_i \tag{1}$$

由于 0 范数的非凸性及其它特点,上述问题的求解非常困难。此外,从一个冗余字典中寻找信号的稀疏扩展是一个 NP 难题,为了解决这个难题,Donoho 等人提出将 0 范数下的优化问题扩展为具有凸优化性质的 1 范数优化问题[6]:

$$\min\|\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{d}\rangle\|_1, \text{ s.t. } \boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{M}\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{d}_i\rangle d_i \tag{2}$$

基于式(2),E Candes 提出了基追踪算法[11],求出的解是全局最优的,稀疏性、稳定性好,但计算复杂度仍然非常高。Mallat[7]提出的贪婪匹配追踪算法降低了计算复杂度。在数字信号处理中,只要算法中迭代次数远远小于信号长度,则稀疏分解是成功的,但某一步选择错误需要多步进行修正。

2 稀疏分解新方法

字典(时频原子库)的构造无疑是至关重要的,一般采用一个经伸缩、位移、频率调制的 Gauss 函数组成原子集合(Gabor 字典),一个 Gabor 原子用一个经过调制的高斯窗函数表示:

$$\boldsymbol{d}_\gamma(t)=\frac{1}{\sqrt{s}}g\left(\frac{t-u}{s}\right)\cos(vt+w) \tag{3}$$

式中:$g(t)=\mathrm{e}^{-\pi t^2}$ 为高斯窗函数;$\gamma=(s, u, v, w)$为时频参数,s 为伸缩因子(尺度因子),u 为平移因子(位移因子)。

理论上 Gabor 字典是无穷的,必须对字典离散化处理。然而,构造出的字典的原子个数数目相当大,一般的计算机内存无法存储处理这样一个庞大的字典。为了减少计算量,有必要对过完备原子库进行精简或按照信号的特征来构造过完备原子库。本文受文献[6]的启发,提出一种基于参数 u 的改进贪婪匹配追踪算法,降低计算复杂度。

以 $N=256$ 的情形为例,Gabor 原子可表示为:

$$\boldsymbol{d}_\gamma(t)=\frac{1}{\sqrt{2^j}}\exp\left\{-\frac{\pi(t-p\,2^{j-1})^2}{2^{2j}}\right\}\cos\left(k2^j\pi\ t+\frac{i\pi}{6}\right) \tag{4}$$

式中:$j=1, 2, \cdots, 8$;$i=1, 2, \cdots, 12$。

原子的总数为 $M=119\ 756$ 个,但大多数原子是无用的。令字典集合为:

$$\boldsymbol{d}_\gamma(t)=\frac{1}{\sqrt{2^j}}\exp\left\{-\frac{\pi(t-u)^2}{2^{2j}}\right\}\cos\left(k2^j\pi\ t+\frac{i\pi}{6}\right) \tag{5}$$

式中:$u\in\{0, 1, \cdots, N\}$;$1\leqslant j\leqslant\log_2 N$;$0\leqslant k\leqslant 2^{j+1}$;$0\leqslant i\leqslant 12$。

基于二分法的思想,先分别固定 $u=\frac{N}{4}$ 和 $u=\frac{3N}{4}$(在 $N=256$ 的情形下,固定 $u=64$ 和 $u=192$),参数 s、v 和 w 取遍所有的值,缩小字典集合 D_1 和 D_2,分别在缩小字典集合上求解优化问题 $\max\ |<\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}_\gamma>|$,$\boldsymbol{d}_\gamma\in D_q$,$q=1, 2$。寻找向量 $\boldsymbol{d}_{\gamma_0}$,比较分别得到的最优值,若固定 $u=\frac{N}{4}$情形下求解优化问题得到的最优值大于固定 $u=\frac{3N}{4}$情形下的最优值,则原子的中心位置应落在 $u\in\left[0, \frac{N}{2}\right]$上,反之,应落在 $u\in\left[\frac{N}{2}, N\right]$上。在选定的原子中心位置的区间 $u\in\left[0, \frac{N}{2}\right]$或 $u\in\left[\frac{N}{2}, N\right]$上分别固定 $u=\frac{1}{2}\times\frac{N}{4}$ 和 $u=\frac{1}{2}\times\frac{3N}{4}$或固定 $u=\frac{1}{2}\times\frac{5N}{4}$ 和 $u=\frac{1}{2}\times\frac{7N}{4}$,更新缩小字典集合 D_1 和 D_2,重复上述步骤。依次类推,通过二分法,经过 $2(\log_2 N-1)$次($N=256$ 的情形下是 14 次)求解优化问题 $\max\ |<\boldsymbol{f},\boldsymbol{d}_\gamma>|$可得到原始信号 $\boldsymbol{f}$ 的第一次投影,得到向量 $\boldsymbol{d}_{\gamma_0}$,实现 $\boldsymbol{f}=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{d}_{\gamma_0}\rangle \boldsymbol{d}_{\gamma_0}+r_f^{(0)}$。

基于二分法确定中心位置 u 的贪婪匹配追踪算法的基本思想是:得到 $\boldsymbol{f}=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{d}_{\gamma_0}\rangle \boldsymbol{d}_{\gamma_0}+r_f^{(0)}$,寻找到向量 $\boldsymbol{d}_{\gamma_0}$ 后,需对投影余项 $r_f^{(0)}$ 做进一步分解,对余项 $r_f^{(0)}$ 的分解过程中,仍然需考虑原子的中心位置,仍需利用二分法得到分解 $r_f^{(0)}=\langle r_f^{(0)},\boldsymbol{d}_{\gamma_1}\rangle \boldsymbol{d}_{\gamma_1}+r_f^{(1)}$,寻找到向量 $\boldsymbol{d}_{\gamma_1}\in \boldsymbol{D}/\boldsymbol{d}_{\gamma_0}$,算法与原始信号 $\boldsymbol{f}$ 的分解类似,由此可得到基于参数 u 的改进贪婪匹配追踪算法。以信号采样维数 $N=2^n$(例如 $N=256, 512, 1\ 024$ 等)为例,可得算法如下:

步骤 1 输入离散化时频参数构造的 Gabor 字典结构:$\boldsymbol{d}_\gamma(t, j, k, i, u)=\frac{1}{\sqrt{2^j}}\exp\cdot\left\{-\frac{\pi(t-u)^2}{2^{2j}}\right\}\cos\left(k2^j\pi\ t+\frac{i\pi}{6}\right)$,输入离散原始信号 $\boldsymbol{f}$,令 $r_f^{(-1)}=\boldsymbol{f}$,$q:=-1$;

步骤2 令 $i:=1$,$j:=1$,$k:=0$;令 $u_1^{(1)}=0$,$u_2^{(1)}=N$,$l:=1$;$g_0:=0$,$h_0:=0$;集合 $\chi_0:=\phi$,$\eta:=\phi$;

步骤 3 令 $v_1=\frac{u_2^{(l)}-u_1^{(l)}}{4}$,计算内积得 $g_1=|<r_f^{(q)},\boldsymbol{d}_\gamma(t,j,k,i, v_1)>|$,记集合 $\chi_1=\{(j,k,i,v_1)\}$,若 $g_1\geqslant g_0$,则 $\gamma:=\chi_1$,$\chi_0:=\chi_1$,$g_0:=g_1$;否则,$\gamma:=\chi_0$;

步骤 4 令 $v_2=3(u_2^{(l)}-u_1^{(l)}(\mathrm{j})/4$,计算内积得 $h_1=|<r_f^{(q)},d_\gamma(t,j,k,i, v_2)>|$,记集合 $\eta=\{(j, k,i,v_2)\}$,若 $h_1\geqslant h_0$,则 $\eta:=\eta$,$\eta:=\eta$,$h_0:=h_1$;否则,$\eta:=\eta$;

步骤 5 如果 $k<2^{j+1}$,则 $k:=k+1$,转**步骤 3**;

否则,转**步骤 6**;

步骤 6　如果 $j < \log_2 N$,$j := j+1$,转**步骤 3**;否则,转**步骤 7**;

步骤 7　如果 $i < 12$,$i := i+1$,转**步骤 3**;否则,转**步骤 8**;

步骤 8　如果 $l < 2(\log_2 N - 1)$,则 $l := l+1$,转**步骤 9**;否则,转**步骤 10**;

步骤 9　如果 $g_0 \geqslant h_0$,令 $u_2^{(l)} = \frac{u_2^{(l-1)}}{2}$,转**步骤 3**;否则,$u_1^{(l)} := 2u_1^{(l-1)}$,转**步骤 3**;

步骤 10　如果 $g_0 \geqslant h_0$,则 $\gamma_{q+1} := \gamma$;否则,$\gamma_{q+1} := \eta$;

步骤 11　令:$r_f = r_f^{(q)} - \langle r_f^{(q)}, \boldsymbol{d}_{\gamma_{q+1}}(t,j,k,i,u)\rangle \boldsymbol{d}_{\gamma_{q+1}}(t,j,k,i,u)$,如果 $\| r_f \| < \varepsilon$,则:$\boldsymbol{f} = \sum_{m=-1}^{q} \langle r_f^{(m)}, \boldsymbol{d}_{\gamma_{m+1}}(t,j,k,i,u)\rangle \boldsymbol{d}_{\gamma_{m+1}}(t,j,k,i,u)$;否则,Gabor 字典中清除 $\boldsymbol{d}_{\gamma_{q+1}}(t,j,k,i,u)$,令 $q := q+1$,$r_f^{(q)} := r_f$,转**步骤 2**。

3　数值算例

实验中利用 Matlab 进行仿真实验,采用长度为 256 取值范围为[0, 255]的随机信号进行改进后的匹配追踪算法的稀疏分解。其中原始信号见图 1,分解后的稀疏信号见图 2。

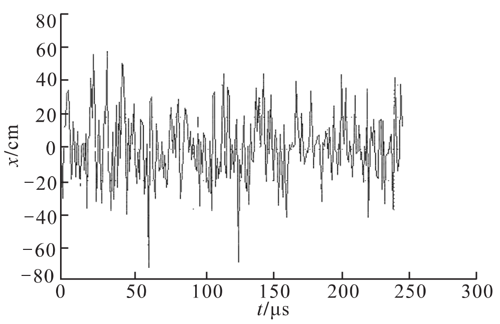

图 1　长度为 256 的原始非稀疏信号

Fig. 1　Original non-sparse signals whose length is 256

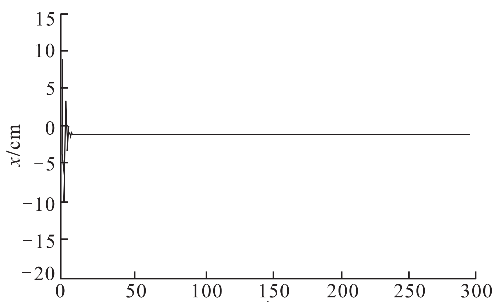

图 2　改进后的贪婪匹配算法得到的稀疏信号

Fig. 2　Sparse signals obtained by modified MP algorithm

从实验仿真结果看出,通过此方法信号稀疏分解效果非常明显,而且在极短的时间内完成,能高效地达到预想的稀疏分解效果。

4　结语

本文提出基于位置参数二分法控制的信号稀疏分解新算法,该算法不但提高了信号稀疏分解的速度,而且同时提高了信号稀疏分解的效果。该方法简单易做,不仅可以运用于贪婪匹配算法,而且也容易推广到基追踪算法、正交匹配追踪算法、分断正交匹配追踪等算法中。

参考文献(References):

[1]　邵文泽,韦志辉.压缩感知基本理论:回顾与展望[J].中国图像图形学报,2012,17(1):1-12.
SHAO Wenze, WEI Zhihui. Advances and perspective on compressed sensing theory [J].Journal of image and graphics,2012,17(1):1-12. (in Chinese)

[2]　曹离然.面向压缩感知的稀疏信号重构算法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2011.
CAO Liran. Research on recovery algorithms for compressed sensing of sparse signals [D]. Harbin: Harbin institute of technology,2011. (in Chinese)

[3]　Starck J L, Elad M, Donoho D. Redundant multiscale transforms and their application for morphological component analysis[J]. Advances in imaging and electron physics, 2004, 132: 287-348.

[4]　练秋生,陈书贞.基于解析轮廓波的图像稀疏表示及其在压缩传感中的应用[J].电子学报, 2010, 38(6): 1293-1298.
LIAN Qiusheng, CHEN Shuzhen. Sparse image representation using the analytic contourlet transform and its application on compressed sensing [J]. Acta electronic sinica, 2010, 38 (6). 1293-1298. (in Chinese)

[5]　Qu X, Cao X, Guo D, et al. Combined sparsifying transforms for compressed sensing MRI[J].Electronics letters, 2010, 46 (2):121-126.

[6]　Donoho D L. Compressed sensing[J].IEEE trans information theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

[7]　Mallat S G, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J].IEEE trans signal process, 1993, 41(12): 3397-3415

[8]　Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE trans on information theory, 2007,53(12): 4655-4666.

[9]　Needell D, Vershynin R. Signal recovery from inaccurate and incomplete measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE journal of selected topics in signal processing, 2010, 4: 310-316.

[10]　李炳杰,叶萌.基于非相干准则的压缩感知观测矩阵设计的极大极小方法[J].空军工程大学学报:自然科学版,2011,12(5):81-84.
LI Bingjie, YE Meng. The minimax method of design of measurement matrices for compressed sensing based on incoherence criterion[J]. Journal of air force engineering university:natural science edition,2011,12(5):81-84.(in Chinese)

[11]　Cand. Compressive sampling[J]. Proceedings of the international congress of mathematicians, 2006 (3): 1433-1452.

(编辑:田新华)