

基于递推总体最小二乘的机载单站无源定位算法

吴昊, 陈树新, 张衡阳

(空军工程大学信息与导航学院, 陕西西安, 710077)

摘要 对于机载单站无源定位中观测向量和系数矩阵均存在噪声的情况,采用经典的最小二乘(LS)算法会导致估计结果有偏,而一般的批处理算法运算量大,不满足定位的实时性要求。为此提出一种递推总体最小二乘定位(RTLS)算法。在建立机载无源测向定位模型的基础上,引入由系数矩阵和观测向量构成的增广矩阵,利用矩阵分解的性质建立了增广自相关逆矩阵和最右奇异向量的递推方程,从而推导出RTLS定位算法。仿真结果表明,RTLS算法的收敛速度和定位精度优于RLS算法和TWDRLS算法,并且实现了TLS算法对目标位置的实时估计,能够定位需求。

关键词 无源定位;递推总体最小二乘估计;单站定位;定位精度

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2013.01.014

中图分类号 TN971 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2013)01-0062-04

Recursive Total Least Squares-Based Airborne Single-Observer Passive Location Algorithm

WU Hao, CHEN Shu-xin, ZHANG Heng-yang

(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: In the application of airborne single-observer passive wireless radio frequency injection location, both the observation vector and coefficient matrix are noisy, the application of the typical least square (LS) algorithm will make the location estimation biased. Furthermore, such general batch processing algorithm is rather complicated and needs large amount of computation which fails to comply with the real-time requirement of passive location. Therefore, a recursive total least squares (RTLS) algorithm is proposed. At first, airborne passive bearing location model is build. Based on the above an augmented matrix made up of coefficient matrix and observation vector is introduced, then the recursive equations of the augmented inverse correlation matrix and the most right singular vector are obtained according to the properties of matrix decomposition. Simulation results show that convergence rate and location accuracy of RTLS algorithm are better than those of RLS algorithm and TWDRLS algorithm, and the real time estimation of TLS algorithm is achieved, which can meet the requirement of location.

Key words: passive location; recursive total least squares estimation; single-observer location; location accuracy

机载单站无源定位灵活性好,隐蔽性强,在各个领域得到了广泛的应用^[1-2]。在一些应用场景中,许多单站无源探测设备只能得到定位目标的角度信

息,因此有必要对基于角度信息的无源定位进行深入探讨^[3-4]。

线性化最小二乘定位算法^[5]是常用的无源测向

收稿日期:2012-05-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61202490);陕西省自然科学基金资助项目(2010JQ8010)

作者简介:吴昊(1988—),男,陕西汉中,博士生,主要从事机载无源定位研究。E-mail: wuhaostudy@163.com

定位算法,它利用泰勒公式将非线性观测方程转化为线性方程,再利用最小二乘算法估计出目标位置,但会带来较大线性化误差,且容易陷入局部最小值。利用几何关系可以在不引入误差的情况下将观测方程线性化,但这会将噪声引入系数矩阵,从而导致 LS 算法的估计结果有偏。一些改进的 LS 算法,如 TWDRLS(The True Weight Decay Recursive LS, TWDRLS)算法改善了权重衰减效应的能量函数^[6],但也无法彻底解决这一问题,因此考虑采用总体最小二乘(TLS)估计算法^[7]。

TLS 算法一般采用奇异值分解法进行计算,运算量大,实时性差,不符合定位要求。Schaffrin B 等^[8]提出一种基于拉格朗日极值原理的迭代总体最小二乘算法,将其转化为方便处理与实现的形式,但迭代时需要所有的测量数据,不能对目标位置进行实时在线估计。文献[9]推导了一种基于瑞利商的递推总体最小二乘算法,能够实时对未知系统进行辨识,具有良好的收敛特性,但这种算法是为自适应滤波设计的,一些参数并不适用于机载无源定位。为此,本文根据奇异值分解的性质,实现了增广自相关逆矩阵和最右奇异向量的实时更新,从而推导出一种递推总体最小二乘估计算法(RTLS),有效解决了 RLS 法定位精度低, TLS 算法不能实时在线估计和运算复杂度高的问题。

1 机载单站测向定位模型

如图 1 所示,辐射源 T 位于 (x, y) 。为研究方便,令飞机从原点出发,沿 x 正半轴匀速运动并测向, (x_i, y_i) 是第 i 个测向点的坐标, ϕ_i 为飞机在第 i 个测向点所测得的方位角。

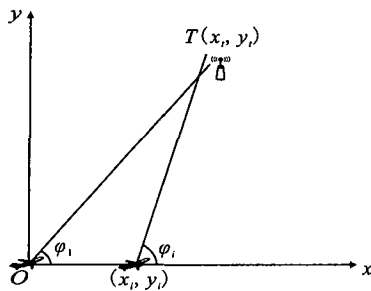


图 1 定位模型

Fig. 1 Location model

于是有:

$$\phi_i = \arctan\left(\frac{y-y_i}{x-x_i}\right) + e_i \quad (1)$$

式中 e_i 为测向噪声,假设其服从均值为 0 的正态分布,即 $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ 。 n 个测向点的测量方程可写为矩阵形式:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}(X) + \boldsymbol{E} \quad (2)$$

式中:

$$\boldsymbol{f}(X) =$$

$$\left[\arctan\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right), \arctan\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right), \dots, \arctan\left(\frac{y-y_n}{x-x_n}\right) \right]^T;$$

$$\boldsymbol{E} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T.$$

为求解以上非线性方程,可以将式(2)进行一阶泰勒展开,在忽略高次项的基础上利用最小二乘算法估计出目标位置,但会带来较大的线性化误差。令 $z_i = x_i \sin \phi_i - y_i \cos \phi_i$, 将式(2)转化为以下线性形式:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} \quad (3)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T; \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \sin \phi_1 & -\cos \phi_1 \\ \sin \phi_2 & -\cos \phi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sin \phi_n & -\cos \phi_n \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{X} = (x, y).$$

式(3)的最小二乘意义下的解为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{LS} = (\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H})^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{Z} \quad (4)$$

测得的角度总是存在误差的,因此观测向量 \boldsymbol{Z} 和系数矩阵 \boldsymbol{H} 均受到噪声影响。设观测向量和系数矩阵的精确值为 \boldsymbol{Z}^* 、 \boldsymbol{H}^* , 则有:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}^* + \Delta \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^* + \Delta \boldsymbol{H} \quad (5)$$

式中: $\Delta \boldsymbol{Z}$ 、 $\Delta \boldsymbol{H}$ 分别为观测向量和系数矩阵的误差矩阵。令 $\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{Z}]$, $\Delta \boldsymbol{D} = [\Delta \boldsymbol{H}, \Delta \boldsymbol{Z}]$, 使:

$$(\boldsymbol{D} + \Delta \boldsymbol{D}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

满足 $\min_{\Delta \boldsymbol{D}, \boldsymbol{X}} \|\Delta \boldsymbol{D}\|_F^2$ 的 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 即为总体最小二乘解^[10]。其中 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。从上式可以看出,总体最小二乘估计同时考虑了观测向量和系数矩阵扰动对定位精度的影响。

为求解 $\hat{\boldsymbol{X}}_{TLS}$, 将增广矩阵 \boldsymbol{D} 进行奇异值分解, 得:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}^T \quad (7)$$

其中,估计参量的个数为 m , 在本文二维定位中 $m = 2$ 。 $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{V} = [v_1, v_2, \dots, v_{m+1}]$, $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m+1})$, σ_i 为矩阵 \boldsymbol{D} 的奇异值,且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{m+1}$ 。则目标位置的总体最小二乘解为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{TLS} = (-1/v_{m+1, m+1}) [v_{1, m+1}, \dots, v_{m, m+1}]^T \quad (8)$$

显然矩阵 \boldsymbol{H} 列满秩,故上式还可以表示为^[11]:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{TLS} = (\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{H} - \sigma_{m+1}^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{Z} \quad (9)$$

与式(4)相比,式(9)减小了由系数矩阵中的噪声引入的误差,得到的估计结果更精确。

2 递推总体最小二乘估计算法

在实际中,考虑到定位的实时性以及机载探测

设备数据存储空间有限,我们希望定位算法具有较低复杂度。TLS算法是一种批处理算法,需要进行奇异值分解和矩阵逆运算,运算复杂度较高,显然不满足以上要求。下面推导递推 TLS 算法。

记由前 k 个测量数据得到的增广矩阵为 $\mathbf{D}(k)$, 且 $k \leq n$, 其它表达式意义与之类似。令:

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{D}^T(k)\mathbf{D}(k)]^{-1} \quad (10)$$

则可利用矩阵反演公式将 \mathbf{P} 矩阵递推如下:

$$\mathbf{P}(k) = \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k^T}{1 + \mathbf{d}_k^T\mathbf{P}(k-1)\mathbf{d}_k} \right] \mathbf{P}(k-1) \quad (11)$$

式中 \mathbf{d}_k 为 \mathbf{D}^T 矩阵第 k 列。由式(6)以及奇异值分解的性质知, $\mathbf{V}(k)$ 为正交矩阵, 其列向量是 $\mathbf{D}^T(k)\mathbf{D}(k)$ 的特征向量, 故 $\mathbf{V}(k)$ 的列向量可看做 $m+1$ 维空间的一组标准正交基, 因此 $\mathbf{v}_{m+1}(k-1)$ 可以用 $\mathbf{v}_1(k), \mathbf{v}_2(k), \dots, \mathbf{v}_{m+1}(k)$ 的线性组合来表示, 即:

$$\mathbf{v}_{m+1}(k-1) = s_1(k)\mathbf{v}_1(k) + \dots + s_{m+1}(k)\mathbf{v}_{m+1}(k) \quad (12)$$

式中 $s_i(k)$ 为标准正交基的系数。引入向量 $\mathbf{w}(k)$, 令:

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{v}_{m+1}(k-1) \quad (13)$$

利用式(6)和式(12), 将式(13)化简如下:

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{v}_{m+1}(k-1) = \left(\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{\sigma_i^2(k)} \mathbf{v}_i(k)\mathbf{v}_i^T(k) \right) \left(\sum_{j=1}^{m+1} s_j(k)\mathbf{v}_j(k) \right) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{s_i(k)}{\sigma_i^2(k)} \mathbf{v}_i(k) \quad (14)$$

由式(11)知 $\mathbf{P}(k)$ 和 $\mathbf{P}(k-1)$ 具有较高的相关性, 而 $\mathbf{v}_{m+1}(k)$ 和 $\mathbf{v}_{m+1}(k-1)$ 为它们的特征向量, 因此也具有较高相关性, 故由式(12)可知:

$$s_{m+1}(k) \gg s_i(k) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (15)$$

因为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{m+1}$, 故有:

$$\frac{s_{m+1}(k)}{\sigma_{m+1}^2(k)} \gg \frac{s_i(k)}{\sigma_i^2(k)} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

则式(14)化简可得到:

$$\mathbf{w}(k) \approx \frac{s_{m+1}(k)}{\sigma_{m+1}^2(k)} \mathbf{v}_{m+1}(k) \quad (17)$$

将 $\mathbf{w}(k)$ 单位化, 得到 $\mathbf{v}_{m+1}(k)$ 的估计值为:

$$\hat{\mathbf{v}}_{m+1}(k) = \mathbf{w}(k) / \|\mathbf{w}(k)\| \quad (18)$$

计算 RTLS 解时, 首先设定目标位置的初始估计值 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{RTLS}}(0)$, 最右奇异向量的初始值 $\mathbf{v}_{m+1}(0)$ 以及矩阵 \mathbf{P} 的初始值 $\mathbf{P}(0)$, 当得到测量数据时, 利用式(11)更新 \mathbf{P} 矩阵, 根据式(13)、(18)递推最右奇异向量, 利用式(8)得目标位置估计值, 如此循环。

比较式(13)与式(11)、(13)、(18)、(8), RTLS 法不仅实现了位置估计的实时递推, 而且与 TLS 法需要存储所有观测数据相比, 仅需存储 $\mathbf{P}(k-1)$ 、 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{RTLS}}(k-1)$ 、 $\mathbf{v}_{m+1}(k-1)$ 就可实现算法。从运算复

杂度来看, TLS 算法需进行奇异值分解和矩阵 \mathbf{D} 的逆, 运算复杂度为 $O(n^3)$, 而 RTLS 算法仅需每次递推时更新矩阵 \mathbf{P} 和矩阵 \mathbf{w} , 运算复杂度降为 $O(n)$ 。

3 仿真分析

3.1 仿真实验

仿真参数设置如下: 某辐射源目标 T 位于 (30 km, 100 km), 飞机以 540 km/h 的速度从 (0, 0) 出发, 向 x 正半轴匀速运动并测向, 测量周期为 1 s, 测量噪声服从均值为 0, 方差为 σ^2 的正态分布。设目标位置的递推估计初始值为 (0, 0), \mathbf{P} 矩阵初始值 $\mathbf{P}(0) = 10^5 \mathbf{I}$, \mathbf{I} 为 3×3 单位矩阵。为了准确分析算法性能, 进行多次 Monte-Carlo 仿真, 定义平均相对距离误差:

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [(\hat{x}_j - x_t)^2 + (\hat{y}_j - y_t)^2]} / r \quad (19)$$

式中 M 为 Monte-Carlo 仿真次数, 仿真时假定 $\bar{\delta} \leq 5\%$ 时算法收敛。

仿真实验 1: $M=200$, $\sigma^2=1^\circ$, RLS、TWDRLS、RTLS 算法的 $\bar{\delta}$ 与不同测量次数 n 的关系见图 2。

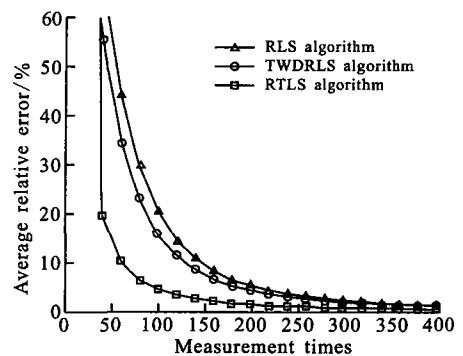


图 2 不同测量次数下算法的性能

Fig. 2 Algorithm performance in different measurement times

仿真实验 2: $M=200$, 不同测角精度下 RLS、TWDRLS、RTLS 算法的性能见图 3。

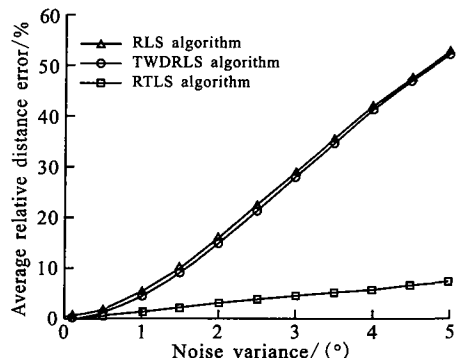


图 3 不同测量噪声下算法的性能

Fig. 3 Algorithm performance in different noise variance

仿真实验 3: $M=200, \sigma^2=1^\circ$, 递推估计初始值为 $(0,0)$, TLS 算法和 RTLS 算法性能比较见图 4。

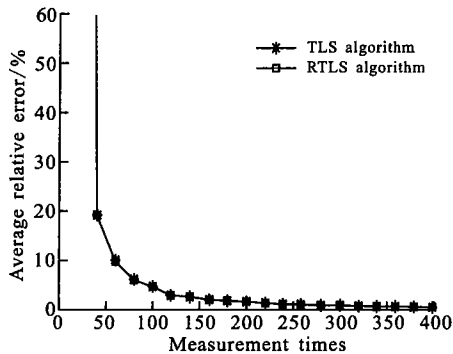


图 4 TLS 算法和 RTLS 算法的比较
Fig. 4 Comparison of TLS algorithm and RTLS algorithm

3.2 结果分析

1)图 2 中,当 σ^2 一定时,随着测量次数的增加,3 种算法的定位精度逐渐提高,且测量次数越多,3 种算法的曲线越接近。具体来看,RTLS 算法的收敛速度和定位精度明显优于 RLS 算法和 TWDRLS 算法,这是因为它同时考虑了系数矩阵和观测向量的扰动,在达到同样的定位精度的情况下,所需的测量次数更少。从图中还可以看出,当 $n>200$ 时,增加测量次数对定位精度的提高不是很明显。

2)图 3 中,当 n 一定时,3 种算法的定位精度随噪声的增大逐渐降低。其中 RTLS 算法曲线增长较慢,且随着噪声的增大,与 RLS 算法和 TWDRLS 算法的精度之差越来越大,因此 RTLS 算法估值更准确。

3)图 4 中,RTLS 和 TLS 算法曲线几乎重合,这验证了式(17)所做的近似是合理的。在达到同样定位精度的情况下,RTLS 的运算复杂度更低。从运行时间来看,RTLS 算法的运行时间明显低于 TLS 算法。此外,RTLS 所需存储空间小,能够实现目标位置的实时在线估计,显然更适合定位要求。

4)从以上分析可以看出,噪声的大小、测量次数等因素都会影响 RTLS 算法的定位精度。要想进一步提高 RTLS 的定位精度,可以采用测量精度较高的探测设备,以得到更准确的角度信息,或者增加探测的时间和次数。

4 结语

本文同时考虑了定位模型中观测向量和系数矩阵噪声的影响,从奇异值分解的性质出发推导了一种递推总体最小二乘定位算法。仿真结果表明,与 RLS 算法、TWDRLS 算法相比,RTLS 算法的定位精度更高,收敛速度更快,且噪声越大,RTLS 的优势越明显;与 TLS 算法相比,RTLS 在达到相同定

位精度的情况下运算复杂度更低,所需存储空间更小,能够对目标位置进行实时在线估计,定位要求。

然而本文没有定量讨论观测向量、系数矩阵不准确对定位精度的影响,噪声严格服从高斯分布的假定也较为理想,下一步将考虑复杂环境对定位精度的影响,提高算法在恶劣环境下的鲁棒性。

参考文献 (References):

- [1] 张君毅,杨义先. 无线射频注入的物理层分析[J]. 无线电工程, 2009, 39(2): 48-50.
ZHANG Junyi, YANG Yixian. Analysis of wireless RF injection on physical layer [J]. Radio engineering of China, 2009, 39(2): 48-50. (in Chinese)
- [2] 袁秀丽,周洪宇,周谷. 世界网络战发展现状的初步研究 [J]. 信息化研究, 2010, 36(8): 20-21.
YUAN Xiuli, ZHOU Hongyu, ZHOU Gu. Abecedarian Study about the actuality of the international development of the network war [J]. Informatization research, 2010, 36(8): 20-21. (in Chinese)
- [3] Gharehshiran O N, Krishnamurthy V. Coalition formation for bearings-only localization in sensor networks—a cooperative game approach [J]. IEEE transactions on signal processing, 2010, 58(8): 4322-4338.
- [4] 王崇崇,冯金富,李寿,等. 基于角度信息的近空间雷达网定位算法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2012, 13(1): 33-36.
WANG Shenshen, FENG Jinfu, LI Qian, et al. Location algorithm for near space radar network based on angle information [J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2012, 13(1): 33-36. (in Chinese)
- [5] Foy W H. Position-location solutions by Taylor series estimation [J]. IEEE transactions on aerospace and electronic systems, 1976, AES-12(3): 187-194.
- [6] Leung C S, Tsoi A C, Chan L. Two regularizers for recursive least squared algorithm in feedforward multilayered neural networks [J]. IEEE transactions on neural networks, 2001, 12(6): 1314-1332.
- [7] Bertrand A, Moonen M. Consensus-based distributed total least squares estimation in ad hoc wireless sensor networks [J]. IEEE transactions on signal processing, 2011, 59(5): 2320-2330.
- [8] Schaffrin B, Wieser A. On weighted total least-squares adjustment for linear regression [J]. Journal of geodesy, 2008, 87(7): 415-421.
- [9] CHANG Dongxia, FENG Dazheng, ZHENG Weixing, et al. A fast recursive total least squares algorithm for adaptive IIR filtering [J]. IEEE transactions on signal processing, 2005, 53(3): 957-964.
- [10] 朱义勇,姚富强,王厚生,等. 一种优化的自适应总体最小二乘系统辨识算法[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(18): 4843-4846.
ZHU Yiyong, YAO Fuqiang, WANG Housheng, et al. Novel variable step-size adaptive TLS algorithm [J]. Journal of system simulation, 2008, 20(18): 4843-4846. (in Chinese)
- [11] Felus Y A. Applications of total least-squares for spatial pattern analysis [J]. Journal of surveying engineering, 2004, 130(3): 126-133.