关于规范紧框架超小波若干问题的研究

王凤兰，　李炳杰
(空军工程大学理学院,陕西　西安　710051)

摘要　给出了规范紧框架超小波的3个重要结论。①空间 $L^2(R)^{(m)}$ 中长度为 m 的规范紧框架超小波可扩展为较大空间 $L^2(R)^{(m+1)}$ 中长度为 $m+1$ 的超小波,也即空间 $L^2(R)^{(m)}$ 的规范紧超小波框架可扩展为较大空间 $L^2(R)^{(m+1)}$ 的规范正交基。从而为规范紧框架超小波与超小波搭起了桥梁。②借助于酉等价性,讨论了规范紧框架超小波的等价性.给出一个长度为 m 的规范紧框架超小波当最后一个分量用酉等价的规范紧框架小波代替时,所形成的仍然是一个规范紧框架超小波。③改进了规范紧框架超小波定义的条件,利用空间理论,给出了判定规范紧框架超小波的一个充分条件。该条件较定义中的条件相对简单,利用泛函分析对这些结论给出了证明,这些结论给处理超空间中的信号提供了重要的理论依据。

关键词　规范紧框架超小波;规范紧框架小波;规范紧框架
DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2011.06.017
中图分类号　O174.2　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2011)06-0083-04

框架的研究是小波分析理论研究的重要内容之一,从空间中元素表示的角度看,框架可看成是基组概念的推广。空间中的任意元素均可由框架元素线性表示,这是与正交基的相似之处,但其分解系数却不是唯一确定的,这是与正交基的不同之处。正是由于框架有一定的冗余性,可以使得在低精度下获得的小波系数却可以在相对高的精度下重建f。因此,它在信号处理中特别是在信号消噪、特征提取、鲁棒信号处理等方面具有广泛的应用。近几年来,关于框架的发展已经成为小波研究的热点之一。

小波框架指的是可以利用一个小波生成一组框架,我们将这个小波生成的框架称为小波框架,而将该小波称为框架小波。它是框架理论中欠发展的领域,同时也是最具应用价值的框架之一。戴兴得、韩得广等人以泛函分析和算子代数为工具对小波框架进行了广泛的研究[1]。

小波分析中的超小波[2]是指较大空间 $L^2(R)\oplus L^2(R)\oplus\cdots\oplus L^2(R)$ 中的小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$,是基于小波分析基础上的信号分析方法。关于超小波的扩展性[3-4]及MRA超小波[5-6]已经得到了一些重要结论。超小波的独特之处在于对解决信号的多重性问题有小波无法比拟的优势。在数据压缩方面,当有同样的数据时,超小波可以压缩多个信号[7]。可以预计,超小波将被广泛应用于图像处理、语音信号处理、高清电视系统等方面。

类似地,研究超空间 $L^2(R)\oplus L^2(R)\oplus\cdots\oplus L^2(R)$ 中的规范紧超小波框架和规范紧框架超小波也具有十分重要的作用。本文利用泛函分析工具对规范紧框架超小波若干问题进行了研究,包括规范紧框架超小波可扩展为更大空间的超小波、规范紧框架超小波等价性以及规范紧框架超小波的判定问题。利用泛函分析对这些结论给出了证明。这些结论将为我们处理超空间中的信号提供重要的理论依据。

1　记号及定义

小波理论包含对 $L^2(R)$ 空间一种仿射结构[8]的研究,即给定2个酉算子,平移算子 T 和伸缩算子 D,满

* **收稿日期**:2011-05-19
基金项目:陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2011JM8031)
作者简介:王凤兰(1981-),女,陕西宝鸡人,讲师,硕士,主要从事智能信号处理及超小波研究.
E-mail:fenglantk823@126.com

足以下交换关系：

$DTD^{-1}=T^k,k\geqslant 2,k\in Z,k$ 被称为尺度因子。在典型的小波理论中，空间 $L^2(R)$ 的一般算子定义为以下形式：

平移算子 $Tf(x)=f(x-1),x\in R,f\in L^2(R)$；

伸缩算子 $Df(x)=\sqrt{k}f(kx),x\in R,f\in L^2(R),k\geqslant 2,k\in Z$；

超空间 $L^2(R)^{(m)}=L^2(R)\oplus L^2(R)\oplus\cdots\oplus L^2(R)$（$m$ 个 $L^2(R),m\geqslant 2$）（本文恒定 $m\in Z^+$）。

本文中，如不做特别说明，都以 $k=2$ 来计算。首先给出如下定义：

定义 1 框架小波[3]：令 $\psi\in L^2(R)$，如果存在 2 个常数 A,B，其中 $0<A\leqslant B$，使得对任意给定的 $f\in L^2(R)$，有：$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k,l\in Z}|<f,D^kT^l\psi>|^2\leqslant B\|f\|^2$ 成立，则称 $\{D^kT^l\psi:k,l\in Z\}$ 是 $L^2(R)$ 的一组框架，ψ 是一个框架小波。特别地，当 $A=B=1$ 时，称 ψ 是规范紧（或 Parseval）框架小波（简记为 NTFW）。

注：$D^kT^l\psi$ 表示对 ψ 进行了 l 次的平移和 k 次的伸缩，其中 $k,l\in Z$。

文中着重介绍的是规范紧框架超小波，下面给出它的确切定义。

定义 2 超小波（规范紧框架超小波）[3]：假定 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m$ 是 $L^2(R)$ 的规范紧框架小波，$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是空间 $L^2(R)^{(m)}=L^2(R)\oplus L^2(R)\oplus\cdots\oplus L^2(R)$ 的 m 元组。

若 $\{D^kT^l\psi_1,D^kT^l\psi_2,\cdots,D^kT^l\psi_m:k,l\in Z\}$ 形成 $L^2(R)^{(m)}$ 的一组规范正交基，则称 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是 $L^2(R)^{(m)}$ 的一个长度为 m 的超小波。

若 $\{D^kT^l\psi_1,D^kT^l\psi_2,\cdots,D^kT^l\psi_m:k,l\in Z\}$ 形成的是 $L^2(R)^{(m)}$ 的一组规范紧框架，则称 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是 $L^2(R)^{(m)}$ 的一个长度为 m 的规范紧框架超小波。

注：以规范紧框架超小波定义为基础，要说明的是规范紧框架超小波指的是可生成规范紧框架的超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$，而规范紧超小波框架指的是由超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 生成的规范紧超小波框架。

2 规范紧框架超小波的几个结论

空间 $L^2(R)^{(m)}$ 中的规范紧框架超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 可扩展为更大空间 $L^2(R)^{(m+1)}$ 中的超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m,\psi_{m+1})$，从而为规范紧框架超小波与超小波搭起了桥梁，也为我们进一步研究超空间 $L^2(R)^{(m+1)}$ 中的信号提供重要的理论依据。为了对该定理有充分的认识，先看下面 2 个引理。

引理 1[1] 令 J 是一个可数（或有限）的指标集。$\{x_n:n\in J\}$ 是 H 的一组规范紧框架，则存在一个希尔伯特空间 $K\supseteq H$ 及 K 的一组规范正交基 $\{e_n:n\in J\}$ 使得 $Pe_n=x_n$，P 是从 K 到 H 的正交投影。

引理 2[1] 令 J 是一个可数（或有限）的指标集。$\{x_n:n\in J\}$ 是希尔伯特空间 H 的一组规范紧框架当且仅当存在一个希尔伯特空间 M 及它的一组规范紧框架 $\{y_n:n\in J\}$ 使得 $\{x_n\oplus y_n:n\in J\}$ 是 $H\oplus M$ 的一组规范正交基。（如果 $\{x_n:n\in J\}$ 是一组规范正交基，M 将是一个零空间且每个 y_n 是零向量）

由规范紧框架超小波的定义以及这 2 个引理，我们得到这样一个结论，空间 $L^2(R)^{(m)}$ 中的规范紧框架超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 可扩展成较大空间 $L^2(R)^{(m+1)}$ 中的超小波 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m,\psi_{m+1})$。同时，也意味着将空间 $L^2(R)^{(m)}$ 中的规范紧框架扩展为 $L^2(R)^{(m+1)}$ 空间中的规范正交基。

定理 1 假定 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是 $L^2(R)^{(m)}$ 中的一个长为 m 的规范紧框架超小波，则存在一个 $L^2(R)$ 及它的一个规范紧框架小波 ψ_{m+1}，使得 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m,\psi_{m+1})$ 为空间 $L^2(R)^{(m+1)}$ 的一个长为 $m+1$ 的超小波。

证明：此时，只证明 $L^2(R)^{(2)}$ 情形，一般情形类似。由引理 1，存在一个希尔伯特空间 $L^2(R)^{(2)}\supseteq L^2(R)$ 及它的一组规范正交基 $\{e_n:n\in J\}$ 使得 $Pe_n=D^kT^l\psi_1$，$\forall k,l\in Z$。其中 P 是从 $L^2(R)^{(2)}$ 到 $L^2(R)$ 的映射。再由**引理 2**，取希尔伯特空间 $L^2(R)$ 及该空间的一组规范紧框架 $\{D^kT^l\psi_2,\forall k,l\in Z\}$，使得 $\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2,\forall k,l\in Z\}$ 是 $L^2(R)^{(2)}$ 的一组规范正交基，满足 $e_n=\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2,\forall k,l\in Z\}$。由超小波的定义知，$(\psi_1,\psi_2)$ 是 $L^2(R)^{(2)}$ 的一个超小波。也即，规范紧超小波框架可扩展为更大空间的规范正交基。

借助于酉等价性，我们讨论规范紧框架超小波的等价性问题。

定理 2 假定 $(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 是空间 $L^2(R)^{(m)}$ 的一个规范紧框架超小波，如果存在一个 $L^2(R')$ 及该空

间的一个规范紧框架小波 ψ'_m,使得 ψ'_m 与 ψ_m 各自形成的规范紧框架是酉等价的,则$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{m-1},\psi'_m)$也是一个规范紧框架超小波。

证明:令 $U\in B(L^2(R),L^2(R'))$,使得 $U(D^kT^l\psi_m)=D^kT^l\psi'_m,\ \forall k,l\in Z$。则可定义酉算子 $V:=(I\oplus U)$ 使得 $V(D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\oplus\cdots\oplus D^kT^l\psi_m)=(D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\oplus\cdots\oplus D^kT^l\psi'_m)$。

因此,$\{D^kT^l\psi_1,D^kT^l\psi_2,\cdots,D^kT^l\psi'_m:k,l\in Z\}$是一组规范紧框架,也即$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{m-1},\psi'_m)$是一个规范紧框架超小波。

该定理说明了当规范紧框架超小波$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$的最后一个分量 ψ_m 所形成的框架与其它的规范紧小波 ψ'_m 框架酉等价时,那么,$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{m-1},\psi'_m)$也是一个规范紧框架超小波。有了该定理,我们就可以根据所处理的不同信号,改变规范紧框架超小波最后一个分量,选择适合的规范紧框架超小波。

在文献[4]中,给出了判定超小波的一个充分和必要条件,在这里,我们给出规范紧框架超小波的一个充分条件。

定理 3　假定 $\psi_1,\psi_2,\cdots\psi_m$ 分别是 $L^2(R)$的规范紧框架小波,如果$\{D^kT^l\psi_1,D^kT^l\psi_2,\cdots,D^kT^l\psi_m:k,l\in Z\}$形成的是$\overline{\text{span}}\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\oplus\cdots\oplus D^kT^l\psi_m\}$的一组规范紧框架,则$\overline{\text{span}}\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\oplus\cdots\oplus D^kT^l\psi_m\}=L^2(R)^{(m)}$。即$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$是 $L^2(R)^{(m)}$ 的一个规范紧框架超小波。

证明:此时仍然只证明 $L^2(R)^{(2)}$ 情形,一般的情形类似。由框架定义知,$D^iT^j\psi_1\oplus D^iT^j\psi_2=\sum_{k,l}<D^iT^j\psi_1\oplus D^iT^j\psi_2,D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2>D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2=\sum_{k,l}(<D^iT^j\psi_1,D^kT^l\psi_1>+<D^iT^j\psi_2,D^kT^l\psi_2>)D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2$,而$D^iT^j\psi_1=\sum_{k,l}<D^iT^j\psi_1,D^kT^l\psi_1>D^kT^l\psi_1$,$D^iT^j\psi_2=\sum_{k,l}<D^iT^j\psi_2,D^kT^l\psi_2>D^kT^l\psi_2$,并且满足,$\sum_{k,l}<D^iT^j\psi_1,D^kT^l\psi_1>D^kT^l\psi_2=\sum_{k,l}<D^iT^j\psi_2,D^kT^l\psi_2>D^kT^l\psi_1=0$。因此,$D^iT^j\psi_1\oplus 0=\sum_{k,l}<D^iT^j\psi_1\oplus 0,D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2>D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2$,$0\oplus D^iT^j\psi_2=\sum_{k,l}<0\oplus D^iT^j\psi_2,D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2>D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2$,$\forall i,j\in Z$。

即,在空间 $L^2(R)^{(2)}$ 中,$\overline{\text{span}}\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\}$ 是稠的。

故,$\overline{\text{span}}\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\}=L^2(R)^{(2)}$。也即$(\psi_1,\psi_2)$ 是一个规范紧框架超小波。

该定理给出了规范紧框架超小波的一种判定方法,它较规范紧框架超小波的定义来说,相对比较简单,只要$\{D^kT^l\psi_1,D^kT^l\psi_2,\cdots,D^kT^l\psi_m:k,l\in Z\}$ 形成的是$\overline{\text{span}}\{D^kT^l\psi_1\oplus D^kT^l\psi_2\oplus\cdots\oplus D^kT^l\psi_m\}$ 的一组规范紧框架,那么,$(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$ 就是一个规范紧框架超小波。

3　讨论

关于超小波及规范紧框架超小波虽然已经得到一些结果。但是,超小波及规范紧框架超小波作为一种特殊的信号分析方法,由于其理论发展还处于初级阶段,这方面应用研究比较少,仅散见于文章评述性结论,这也是超小波及规范紧框架超小波值得进一步研究的理由。可以看出,超小波及规范紧框架超小波是近几年小波的分析理论发展的一个研究方向,已经引起国内外的广泛关注,可以预计,其发展将对小波理论的发展和应用产生重要的影响。

参考文献:

[1]　Han De - guang, Larson David R. Frames, bases and group representations [J]. Memoirs of the American mathematical society, 2000, 147(697):1 - 88.

[2]　王凤兰,李炳杰. MRA 超小波的一种判定[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版, 2009,8(9):1 - 5.
WANG Fenglan, LI Bingjie. A characterition of MRA super - wavelets[J]. Journal of Nanyang normal university: natural science edition, 2009, 8(9):1 - 5. (in Chinese)

[3]　Gu Qing, Han Deguang. Super - wavelets and decomposable wavelet frames[J]. The journal of fourier analysis and applications, 2005, 11(6): 683 - 696.

[4] Dai Xingde, Gu Qing. On super - wavelets[J]. Operator theory: advances and applications, 2004, 149: 153 - 165.
[5] Li Wanshe, Wang Fenglan. A characterizition of MRA super - wavelets. [C]// Proceedings of the 2007 international conference on wavelet analysis and pattern reconition. Beijing, China: [s. n.], 2007: 1776 - 1781.
[6] Stefan Bildea, Dorin Ervin Dutkay, Galriel Picioroaga. MRA super - wavelets[J]. New York J Math, 2005, 11: 1 - 19.
[7] Zou Qin. Biorthogonal wavelet filters spectral analysis by discrete super - wavelet transforms[J]. Math theory applied, 2005, 25 (1): 56 - 58.
[8] 李万社,王凤兰. 超小波发展综述[J]. 陕西师范大学学报:自然科学版, 2007, 35(3): 113 - 119.
LI Wanshe, WANG Fenglan. A survey of developments of superwavelets[J]. Journal of Shaanxi normal university: natural science edition, 2007, 35(3): 113 - 119. (in Chinese)

(编辑:徐楠楠)

Study on Several Problems of Normalized Tight Frame Super - wavelets

WANG Feng - lan, LI Bing - jie
(Institute of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstact: Three impotant results are given on normalized tight frame super - wavelets in the article. Firstly, A normalized tight frame super - wavelets of length in the space can be extended to a super - wavelets of length in the bigger space . That is a normalized tight super - wavelets frame in the space is extendable to an orthonormal basis in the bigger space . So the relationship between parseval super - wavelets and super - wavelets is found. Secondly, the equivalence of the normalized tight frame super - wavelets are studied by means of the unitary equivalence. The m - tuple remainly forms a normalized tight frame super - wavelets , when the final component of normalized tight frame super - wavelets is unitarily replaced by a normalized tight frame wavelet. Finally, the conditions of the normalized tight frame super - wavelets are improved. A sufficent condition on a normalized tight frame super - wavelets is given by using space theory. The three results are proofed by using functional analysis. These results function as the important theory basis for the signal processing in the space .

Key words: normalized tight frame super - wavelets; normalized tight frame wavelet; normalized tight frame