

几何相似体应力 - 应变分布相同时的载荷关系

李春旺^{1,2}, 孙强¹, 解武杰¹, 杨尊袍¹, 傅振堂¹

(1. 空军工程大学理学院, 陕西 西安 710051; 2. 西北工业大学航空学院, 陕西 西安 710072)

摘要 为了保证几何相似模型与原件具有完全相同的应力 - 应变分布, 必须对几何相似模型施加与实际构件成对应比例的各种载荷, 因此需要寻求几何相似模型在应力 - 应变分布完全相同时各种外加载荷的比例关系。从相似理论入手, 以 2 端固支的矩形梁下表面边线中点的应力解析表达式为基础进行推导, 得出相应的理论载荷关系, 并用算例在弹塑性状态下验证了所得关系的正确性。得到的结论是: 对于 2 个几何相似构件, 若几何相似系数为 k_l , 则当外加集中载荷的载荷系数为 k_l^2 、均布线载荷的载荷系数为 k_l 、均布面载荷的载荷系数为 1 时, 2 构件的应力 - 应变分布完全相同。

关键词 相似理论; 几何相似; 有限元分析; 载荷

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2011.02.017

中图分类号 O344.3 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2011)02-0081-05

在对大型复杂构件进行试验或者有限元分析时, 为了试验方便或能够建立合适的有限元计算模型, 提高计算精度, 降低计算规模, 往往需要对构件的几何尺寸进行比例扩大或缩小^[1]。然而, 如何才能保证构件在几何尺寸缩放前后, 应力 - 应变分布完全相同? 为回答这个问题, 从相似理论^[2-6]入手, 以 2 端固支的矩形梁下表面边线中点的应力解析表达式为基础, 推导了几何相似构件在应力 - 应变分布完全相同时外加载荷的比例关系, 并用悬臂梁和圆柱壳体在弹塑性状态下验证了所得关系的正确性。

1 相似第一定理

如果函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $f'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 在对应点和对应时刻的比值是一个常数, 即:

$$\frac{f'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = k_f \quad (1)$$

同时, $x_i = k_i x'_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则这 2 个函数相似, k_f 和 k_i 称为相似系数^[7-8]。

如果 2 个物理系统相似, 表示各个物理量关系的量群称为相似判据, 一般用 π 表示。对于相似系统中相似系数的关系, 相似第一定理^[8-9]给出了具体描述: 相似现象的相似判据相等。

2 几何相似构件载荷系数的确定

对于 2 个几何相似^[10]的构件, 外加载荷具有什么样的关系时, 2 个构件的应力分布才会完全相同, 应力相似系数 $k_\sigma = 1$ 为了回答这个问题用 2 端固支的矩形梁, 根据相似理论来推导它们之间的关系。假设梁 2 与梁 1 的几何尺寸之比——几何相似系数为 k_l , 梁 1 的边长分别为 l, b, h , 梁 2 的对应边长为 l', b', h' , 梁 1 梁 2 分别受到上表面中心点的集中载荷 $P(P')$ (见图 1), 或上表面均布线载荷 q (q' 线) 和均布面载荷 q_m

* 收稿日期: 2010-07-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10804130)

作者简介: 李春旺(1977-), 男, 陕西富平人, 讲师, 博士(后), 主要从事航空材料的疲劳与断裂研究。

E-mail: langtaosha666@tom.com

($q'_{\text{面}}$)的作用。

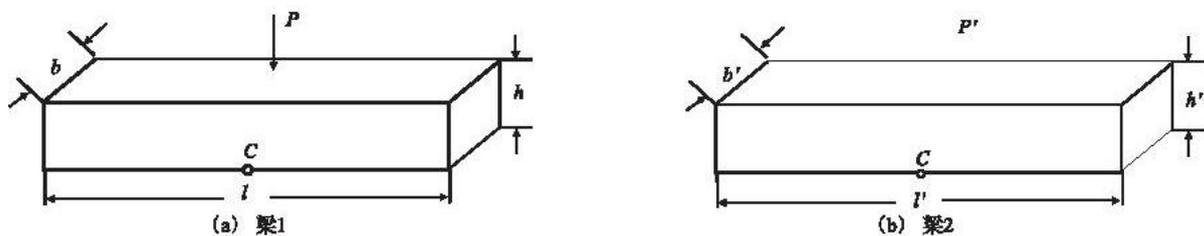


图1 集中载荷加载示意图

Fig. 1 Sketch map of concentrated force

2.1 集中载荷作用下载荷系数的确定

由文献[11]可知,集中载荷作用下,矩形梁下表面边线中点 C 处的应力 σ_c 、 σ'_c 的计算公式分别为:

$$\sigma_c = \frac{3Pl}{2bh^2}, \quad \sigma'_c = \frac{3P'l'}{2b'h'^2} \quad (2)$$

此时相似判据为:

$$\pi = \frac{Pl}{\sigma bh^2}, \quad \pi' = \frac{P'l'}{\sigma'b'h'^2} \quad (3)$$

根据相似第一定理,由 $\pi = \pi'$,可得:

$$P' = \frac{Pl}{\sigma bh^2} \frac{\sigma'b'h'^2}{l'} = k_\sigma k_l^2 P = k_l^2 P \quad (4)$$

2.2 线载荷作用下载荷系数的确定

均布线载荷作用下,矩形梁下表面边线中点 C 处的应力计算公式分别为:

$$\sigma_c = \frac{3q_{\text{线}} l^2}{4bh^2}, \quad \sigma'_c = \frac{3q'_{\text{线}} l'^2}{4b'h'^2} \quad (5)$$

相似判据为:

$$\pi = \frac{q_{\text{线}} l^2}{\sigma bh^2}, \quad \pi' = \frac{q'_{\text{线}} l'^2}{\sigma'b'h'^2} \quad (6)$$

根据相似第一定理,由 $\pi = \pi'$,可得:

$$q'_{\text{线}} = \frac{q_{\text{线}} l^2}{\sigma bh^2} \frac{\sigma'b'h'^2}{l'^2} = k_\sigma k_l q_{\text{线}} = k_l q_{\text{线}} \quad (7)$$

2.3 面载荷作用下载荷系数的确定

均布面载荷作用下,矩形梁下表面边线中点 C 处的应力计算公式分别为:

$$\sigma_c = \frac{3q_{\text{面}}}{4h^2}, \quad \sigma'_c = \frac{3q'_{\text{面}}}{4h'^2} \quad (8)$$

相似判据为:

$$\pi = \frac{q_{\text{面}}}{\sigma h^2}, \quad \pi' = \frac{q'_{\text{面}}}{\sigma'h'^2} \quad (9)$$

根据相似第一定理,由 $\pi = \pi'$,可得:

$$q'_{\text{面}} = \frac{q_{\text{面}}}{\sigma h^2} \frac{\sigma'h'^2}{h'^2} = k_\sigma q_{\text{面}} = q_{\text{面}} \quad (10)$$

上面的推导虽然是以2端固支的矩形梁下表面边线中点为例进行的,但由于推导过程利用了应力的解析表达式,具有普遍的适用性和代表性,其结果可以推广到任意几何形状的构件上。所以,可以得到结论:对于2几何相似构件,若几何相似系数为 k_l ,则当外加集中载荷系数为 k_l^2 、均布线载荷系数为 k_l 、均布面载荷系数为1时,2构件的应力分布完全相同。由应力和应变的对应性可知,2构件的应变分布也完全相同。

3 应用验证

3.1 弹性范围的应用验证

为验证式(4)、(7)、(10)的正确性,设计 2 个悬臂梁,梁 1 的长度为 11 m,正方形横截面的边长为 1 m,梁 2 与梁 1 的几何相似系数 $k_1=10$ 。计算在梁 1 上表面靠近自由端 $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ 的面积上分别施加集中载荷及面载荷,梁 2 上表面靠近自由端 $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ 的面积上分别施加 100 倍的集中载荷及等量面载荷时,2 悬臂梁的应力-应变分布。为便于比较,并考虑工程实际,施加集中载荷时将其平均加载于受力面的 441 个网格节点上,梁 1 每个节点承受 10 kN 压力,整个受力面上载荷的大小为 4.41 MN,所加面载荷的大小为 4.41 MPa;梁 2 每个节点施加的集中载荷为 1 MN,整个受力面上载荷的大小为 $441 \times 1\text{ MN}$,面载荷同样为 4.41 MPa。

梁 1 及梁 2 在集中载荷和面载荷作用下,等效应力分布见图 2。从图中可以看出,各种情况下的最大等效应力值均为 326 MPa,远小于材料的 $\sigma_{0.2}=847.55\text{ MPa}$,悬臂梁的变形完全处于弹性状态。同时由图也可以看出,各种情况下悬臂梁的应力分布及应力最大点的位置相同(应变分布与应力完全一致,所以没有给出应变分布图),最大应力-应变的具体数值也完全相同。这就证明了式(4)、(7)、(10)的正确性。

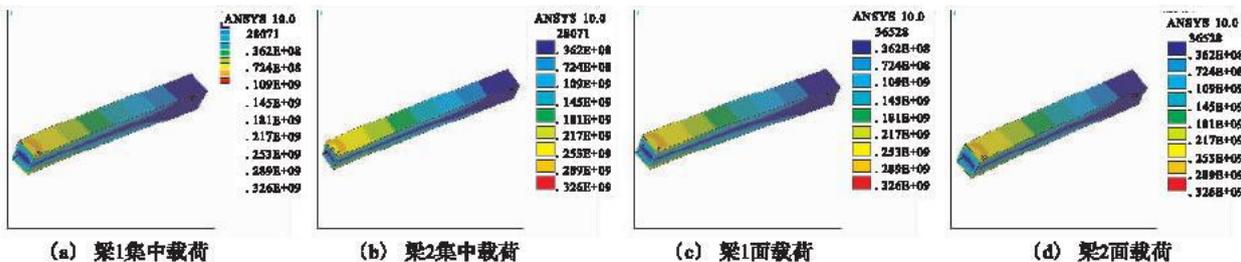


图 2 弹性范围构件应力分布

Fig. 2 Stress distributing of structure in elastic range

3.2 相似理论在塑性范围的应用推广

相似理论属于弹性力学范畴,式(4)、(7)、(10)也是在弹性力学的基础上推导出来的,就是 3.1 中的验证,也处于完全弹性状态。然而在工程实际中,构件局部的形变常常会超出弹性范围,发生塑性变形。这就提出了一个问题:式(4)、(7)、(10)在塑性范围内能否应用;如果能用,偏差有多大。

因此,增大 3.1 中悬臂梁所承受的载荷,使其发生塑性形变,并对结果进行比较。计算时梁 1 每个节点的集中载荷为 80 kN,梁 2 每个节点的集中载荷为 $100 \times 80\text{ kN}$,面载荷都为 $441 \times 80\text{ MPa}$ 。计算结果见表 1 和图 3,可以看出此时最大等效应力已达到 1 480.5 MPa,远大于材料的 $\sigma_{0.2}=847.55\text{ MPa}$,悬臂梁发生了塑性变形。同时从图表也可以看出,各种情况下悬臂梁的应力分布还是完全相同,只是最大应变

表 1 塑性范围最大等效应力-应变比较

Tab. 1 The max von-mise stress-strain in plastic range

	集中载荷		面载荷	
	σ/MPa	$\varepsilon(\%)$	σ/MPa	$\varepsilon(\%)$
梁 1	1 480.5	59.576 6	1 480.5	59.576 6
梁 2	1 480.5	59.577 5	1 480.5	59.577 5
偏差(%)	0	0.001 5	0	0.001 5

略有差异。这就说明式(4)、(7)、(10)可以推广到塑性范围。需要说明的是,此时的最大等效应力远大于材料的屈服极限,在实际工程中这种情况是不允许出现的。模拟分析时之所以设计这么大的应力-应变,只是为了通过比较说明,即使应力远超过屈服极限,根据论文所得出的载荷关系加载,缩放前后的应力-应变分布依然相同,最大值误差依然非常小。

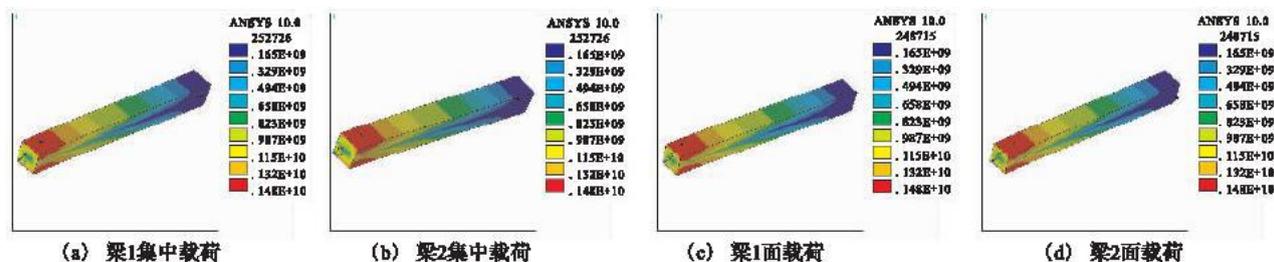


图 3 塑性范围构件应力分布

Fig. 3 Stress distributing of structure in plastic range

3.3 相似理论在塑性范围的再验证

考虑到悬臂梁模型简单,为进一步验证式(4)、(7)、(10)在塑性范围的适用性,设计2个与航空发动机中介机匣形状相近的圆柱壳体,圆柱壳体上对称分布着2个支座和2个圆孔,如图4所示。同前面一样,几何相似系数 $k_l = 10$,研究在支座端面固定时,壳体1圆孔承受集中载荷或面载荷,壳体2圆孔承受100倍集中载荷或等值面载荷时的应力-应变。

计算结果见表2和图4,各种情况下,最大应力都大于材料的 $\sigma_{0.2} = 847.55 \text{ MPa}$,壳体发生了塑性变形。从图表可以看出,各种情况下2圆柱壳体的应力分布完全相同,等效应力-应变最大值虽有差别,但偏差非常小,最大偏差仅为0.242%。再次说明式(4)、(7)、(10)可以推广到塑性范围。但由于在塑性范围,只是用实例验证了载荷加载关系的正确性,所以应用应该控制在小塑性形变范围。对于实际问题,最大应力不应超过材料的屈服极限。

表2 圆柱壳体最大等效应力-应变比较

Tab.2 The max von-mise stress-strain of column shell

	集中载荷		面载荷	
	σ/MPa	$\varepsilon(\%)$	σ/MPa	$\varepsilon(\%)$
壳体1	1 362.7	24.85	1 423.6	41.02
壳体2	1 362.3	24.79	1 423.5	40.98
偏差(%)	0.003	0.242	0.007	0.098

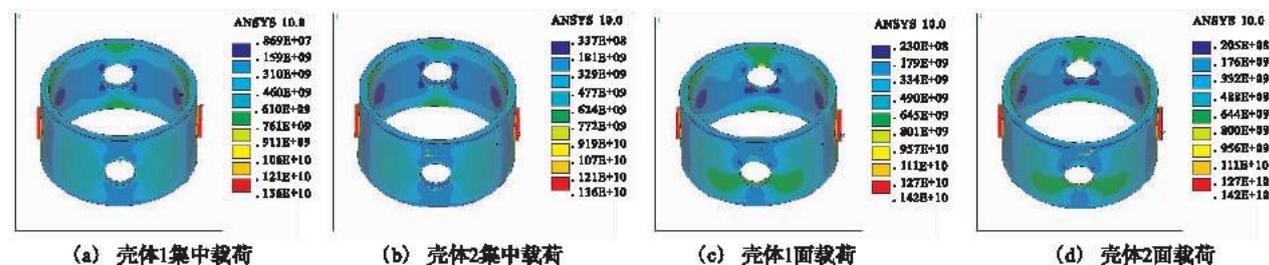


图4 圆柱壳体模型应力分布图

Fig.4 Stress distributing of column shell

4 结束语

将相似理论应用于有限元分析之中,得到相似系数为 k_l 的几何相似构件在应力-应变分布完全相同时外加载荷的比例关系是:集中载荷系数为 k_l^2 ,均布线载荷系数为 k_l ,均布面载荷系数为1。

算例验证结果表明,将相似理论引入材料的应力-应变分析是完全可行的,同时也说明所得到的载荷比例关系是正确的。

论文为在确保构件应力-应变分布相同的情况下,扩大或缩小构件几何尺寸以便建立合适的有限元计算模型,提高计算精度,降低计算规模提供了理论依据,为有限元分析中复杂构件的模型处理提供了新思路。

参考文献:

- [1] 李春旺. 某型航空发动机中介机匣力学性能研究[D]. 西安:空军工程大学,2008.
LI Chunwang. Mechanics function analysis of a certain aeroengine intermediate case[D]. Xi'an: Air force engineering university, 2008. (in Chinese)
- [2] Baker Wilfred E, Westine Peter S. Similarity methods in engineering dynamics[M]. New Jersey: Hayden book company, 1973.
- [3] Hong Taesik, Lee Kunwoo, Kim Sungchan. Similarity comparison of mechanical parts to reuse existing designs[J]. Computer aided designed, 2006, 38:973-984.
- [4] Islam K M, Sarker B P. A similarity coefficient measure and machine parts grouping in cellular manufacturing systems[J]. International journal of production research,2000,38(3):699-720.
- [5] Glenn Murphy. Similitude in engineering[M]. New York:The ronald press company,1950.

- [6] Livetra O S, Ribeiro J F F, Seok S C. A comparative study of similarity measures for manufacturing cell formation[J]. Journal of manufacturing systems, 2008, 27(1): 19 - 25.
- [7] 陈健华. 实验应力分析[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1982.
CHEN Jianhua. Experimental stress analysis[M]. Beijing: China railway press, 1982. (in Chinese)
- [8] 胡冬奎, 王平. 相似理论及其在机械工程中的应用[J]. 现代制造工程, 2009, 10(11): 9 - 12.
HU Dongkui, WANG Ping. The theory of similarity and the application in the mechanical engineer[J]. Modern manufacturing engineering, 2009, 10(11): 9 - 12. (in Chinese)
- [9] 潘慕绚, 黄金泉. 基于相似理论的航空发动机转速自适应 PID 控制[J]. 推进技术, 2003, 24(5): 429 - 431.
PAN Muxuan, HUANG Jinquan. Adaptive PID control for aeroengine by on similarity theory[J]. Journal of propulsion technology, 2003, 24(5): 429 - 431. (in Chinese)
- [10] 文传源. 综合仿真系统与综合相似理论的探索[J]. 系统仿真技术, 2005, 1(1): 1 - 7.
WEN Chuanyuan. Exploration on comprehensive simulation system and comprehensive similarity theory[J]. System simulation technology, 2005, 1(1): 1 - 7. (in Chinese)
- [11] 刘鸿文. 材料力学(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
LIU Hongwen. Material mechanics[M]. Beijing: Higher education press, 1995. (in Chinese)

(编辑: 田新华)

The Load Relationships of the Geometric Similar Components under the Same Stress - strain States

LI Chun - wang^{1,2}, SUN Qiang¹, XIE Wu - jie¹, YANG Zun - pao¹, FU Zhen - tang¹

(1. Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. College of Aeronautics, North-western Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Normally, the original components are lessened or enlarged proportionally to build the geometric similar models when large scale components are tested or studied by means of finite element analysis (FEA). In order to ensure that the same stress - strain states present between the considered model and the original component, the loads corresponding to the original components in proportion should be applied to the geometric similar models. Therefore, it is important to study the load relationships among these geometric similar components with the same stress - strain states. Based on the stress expressions of middle point on the below edge of immobile rectangular cross section beam, the loads' theoretical relationships are obtained using the similarity theory. The correctness of these relationships is verified by the components under elastic and/or plastic stress - strain states. The conclusions are shown as follows: for the two components with geometric similar coefficient k_l , if the concentrated force coefficient is k_l^2 , the uniformly distributed line force coefficient is k_l , or the uniformly distributed plane force coefficient is 1, then the two components are completely the same in stress - strain state.

Key words: similarity theory; geometric similar; FEA; load