

# 基层顶面当量回弹模量确定方法的修正

王振辉, 蔡良才, 顾强康, 刘晓军, 吴爱红

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:**应用弹性层状理论,以弯沉等效为原则研究了基层顶面当量回弹模量的计算方法,指出了现有当量模量换算公式中存在的不足,并根据当量模量的影响因素确定了其边界条件,在大量计算分析的基础上重新建立了荷载作用半径为0.15 m的换算公式,并增加荷载作用半径影响修正系数。修正后的换算公式可适用于基层与土基模量比大于2且基层当量厚度大于0.2 m及荷载作用半径在0.1 m-0.5 m的基层顶面当量回弹模量的换算,具有更高的精度、更好的外延性。

**关键词:**道路工程;基层;弹性层状理论;弯沉等效;当量回弹模量

**DOI:**10.3969/j.issn.1009-3516.2009.06.006

**中图分类号:** U416.216      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009-3516(2009)06-0023-05

水泥混凝土路面设计中普遍采用弹性半空间地基上的薄板理论。由于地基实际上是由不同模量和厚度的基层、底基层或垫层和土基组成的多层体系,因此需要将层状地基等效转换为半无限均质空间体,计算基层顶面的当量回弹模量<sup>[1-5]</sup>。公路规范<sup>[6]</sup>基于弯沉等效的原则并依据荷载当量圆半径0.15 m,得到了基层顶面当量回弹模量,同济大学、长安大学等利用不同的等效原则对基层顶面当量回弹模量的换算方法有过较多研究<sup>[7-10]</sup>。基于混凝土板底拉应力等效原则的基顶模量换算方法<sup>[9]</sup>能较好地反映结构各层参数对板底应力的影响,并与路面设计中板底拉应力作为控制指标相对应,缺点是换算公式没有明确的物理意义,当各层参数超出建立回归公式时选用的参数范围时精度较差,外延性不太好、且较难进行施工检测;已有的基于弯沉等效原则的换算方法<sup>[6,8]</sup>没有考虑荷载作用半径的影响,且换算公式不能满足边界条件,导致 $E_x/E_0$ 值偏小或偏大时精度较差。本文基于弯沉等效的原则,对双层弹性结构基顶当量回弹模量的换算作进一步的分析,建立了更加合理、精度和外延性更好的换算公式。

## 1 基层顶面当量回弹模量的计算推导及其边界条件

多层结构基层顶面和弹性半空间体圆形均布荷载中心处的竖向位移(弯沉)可分别表示为式(1)和式(2):

$$l = [2p\delta(1 - \mu_0^2)/E_0] \tilde{\omega} \quad (1) \quad l' = 2p\delta(1 - \mu^2)/E_i \quad (2)$$

式中: $p$ 为均布荷载压强(MPa); $\delta$ 为荷载圆半径(m); $\mu_0$ 、 $\mu$ 分别为土基和弹性半空间体的泊松比; $E_0$ 、 $E_i$ 分别为土基和弹性半空间体的弹性模量(MPa); $\tilde{\omega}$ 为位移系数。

根据弯沉等效原则,多层结构可等效为弹性半空间体,即有弹性半空间体的弹性模量 $E_i$ 满足 $l = l'$ ,此时模量 $E_i$ 称为基层顶面当量回弹模量。考虑材料泊松比变化较小且对结构层弯沉影响很小,故忽略不计,因此基层顶面当量回弹模量 $E_i$ 仅是土基弹性模量 $E_0$ 及其上当量结构层的模量 $E_x$ 和厚度 $h_x$ 、荷载作用半径 $\delta$ 的函数,令 $\mu_0 = \mu$ ,有:

\* 收稿日期:2009-07-02

作者简介:王振辉(1983-),男,湖南安化人,博士生,主要从事机场道面工程研究;E-mail:buttur521@163.com

蔡良才(1960-),男,浙江宁波人,教授,博士生导师,主要从事机场工程研究;

顾强康(1965-),男,浙江宁波人,教授,博士生导师,主要从事机场工程与岩土工程研究。

$$E_i/E_0 = 1/\tilde{\omega} = f(h_x, E_x/E_0, \delta) \quad (3)$$

显然,  $f(h_x, E_x/E_0, \delta)$  具有严格的数学边界条件: ①  $f(h_x, E_x/E_0, \delta) \geq 1.0$ ; ②  $E_x/E_0 = 1$  时,  $f(h_x, E_x/E_0, \delta) = 1.0$ ; ③  $h_x = 0$  时,  $f(h_x, E_x/E_0, \delta) = 1.0$ ; ④  $\delta \rightarrow 0$  时,  $f(h_x, E_x/E_0, \delta) \rightarrow +\infty$ ; ⑤  $\delta \rightarrow +\infty$  时,  $f(h_x, E_x/E_0, \delta) = 1.0$

考虑实际工程意义, 边界条件①应完全满足, 边界条件②-⑤可以不严格满足, 但是可以用于判断各影响因素对基顶当量模量的影响趋势, 对于合理确定当量模量的换算公式具有重要作用。

## 2 现有基顶当量模量换算公式

基于弯沉等效的基顶当量模量换算方法, 首先将基层和底基层(或垫层)按照等弯曲刚度换算成厚度为  $h_x$ 、模量为  $E_x$  的当量单层结构:

$$E_x = \frac{h_1^2 E_1 + h_2^2 E_2}{h_1^2 + h_2^2} \quad (4)$$

$$h_x = \left( \frac{12D_x}{E_x} \right)^{1/3} \quad (5)$$

$$D_x = \frac{E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3}{12} + \frac{(h_1 + h_2)^2}{4} \left( \frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_2 h_2} \right)^{-1} k_u \quad (6)$$

式中:  $h_x$  为基层和底基层(或垫层)的当量厚度(m);  $h_1$  和  $h_2$  为基层和底基层(或垫层)的厚度(m);  $E_x$  为基层和底基层(或垫层)的当量回弹模量(MPa);  $E_1$  和  $E_2$  为基层和底基层(或垫层)的弹性模量(MPa);  $D_x$  为基层和底基层(或垫层)的当量弯曲刚度(MN·m);  $k_u$  为基层和底基层(或垫层)的层间接触系数。

由式(4)-式(6), 多层弹性结构可以转化为双层弹性体系, 公路规范给出了双层弹性体系理论解的回归公式确定基顶当量回弹模量, 见式(7)和式(7.1)<sup>[6]</sup>。

文献[8]对规范公式进行了分析, 发现: 当  $E_x/E_0$  较大时当量模量换算具有较高的精度, 但是当  $E_x/E_0 < 8$  时, 换算精度较差, 误差可能超过 20%, 不能满足边界条件①, 甚至换算出现负值的现象。因此, 重新对双层弹性体系理论解进行了回归, 得到回归系数的表达式见式(7.2)。

$$E_i = ah_x^b E_0 \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{1/3} \quad (7)$$

$$\begin{cases} a = 6.22 \left[ 1 - 1.51 \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{-0.45} \right] \\ b = 1 - 1.44 \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{-0.55} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} a = \left[ 0.18 + 0.82 \left( \frac{E_0}{E_x} \right)^{0.76} \right]^{-1} \\ b = 1 - 1.21 \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{-0.55} \end{cases} \quad (7.2)$$

深入分析式(7)和式(7.2), 发现: 当量模量换算虽不会出现负值的现象, 但当  $E_x/E_0 > 80$  时, 换算误差随着  $E_x/E_0$  的增大而增大, 误差超过 5%; 当  $E_x/E_0 < 6$  时, 换算误差随着  $E_x/E_0$  的减小而增大;  $h_x < 0.35$  时, 误差超过 5%, 某些路面结构中换算误差甚至超过 20% 的情况。当量模量换算误差变化规律见图 1。

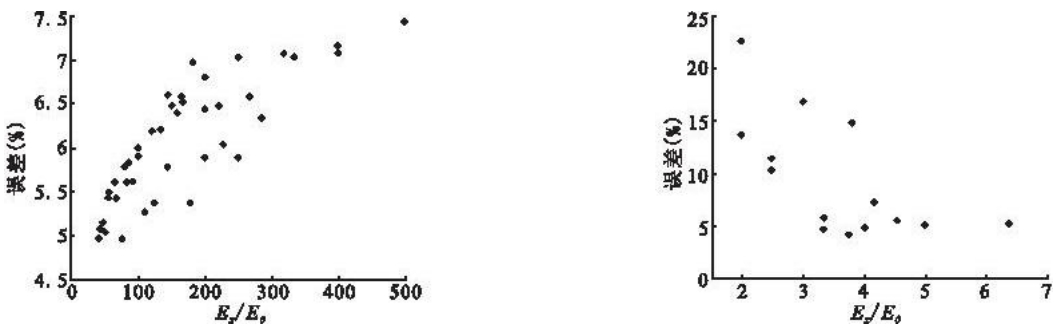


图1 公式(7.2)当量模量换算误差与  $E_x/E_0$  关系图

Fig. 1  $E_x/E_0$  versus calculation error by formula (7.2)

### 3 当量回弹模量换算公式的修正

本文选取大量现有水泥混凝土路面结构形式及结构层参数,并将基层和底基层(或垫层)转化成当量单层结构后,按双层体系采用 BASIR 程序进行弯沉计算,再根据式(1) - 式(3)计算基顶当量模量值。计算中,基层和底基层(或垫层)之间采用层间连续接触条件,转化后双层体系结构计算参数取值见图 2,基顶当量模量  $E_t$  的回归公式如下:

$$E_t = ah_x^b E_0 \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{1/3} k_\delta \quad (8)$$

式中  $k_\delta$  为荷载作用半径修正系数。



图 2 转化模型及计算参数取值

Fig. 2 Transformation Model and Calculation Parameter Value

#### 3.1 回归系数的确定

考虑我国现行土基回弹模量测定通常采用车轮的轮印当量圆半径作为承载板半径,即为 0.15 m。因此首先讨论荷载作用半径  $\delta = 0.15$  时回归系数的确定,此时令  $k_\delta = 1$ 。根据计算得到的基顶当量模量与结构层参数之间的关系进行回归分析,当量结构层与土基光滑接触时和当量结构层与土基连续接触时的公式分别为:

$$\begin{cases} a = 0.59 + 6.07h_x^{0.70} \\ b = 0.44 + 12.36h_x^{2.46} \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{-0.50} \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} a = 0.59 + 5.88h_x^{0.68} \\ b = 0.44 + 13.64h_x^{2.87} \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{-0.50} \end{cases} \quad (8.2)$$

基顶当量模量的回归公式形式决定了它不可能满足  $E_x/E_0 = 1$  和  $h_x = 0$  时严格意义上的数学边界条件,但换算公式(8) - 式(8.2)能满足  $E_x/E_0 \geq 2$  且  $h_x \geq 0.2$  时的工程要求,与根据弹性层状体系理论解反算得到的当量模量相比,换算误差控制在 4% 以内。图 3 为相同双层结构参数根据式(7.1)、式(7.2)和式(8.1)计算得到基顶当量模量与弹性层状体系理论解反算得到的当量模量的比较,图 4 为与其相对应的误差比较。由图 3、图 4 可知,根据本文换算公式得到的当量模量与层状结构理论解始终吻合较好,具有很高的精度。规范公式在当量模量较小时换算精度很差,只有当量模量超过 150 MPa 时才有较高的精度;文献[8]的公式在当量模量较小和较大时换算精度较差;这与前面的分析相一致。

#### 3.2 荷载作用半径修正系数的确定

由图 5 可知,承载板半径是影响基顶当量模量取值的重要因素,其换算公式应考虑荷载作用半径的影响。大量的计算回归分析发现:对不同荷载作用半径和结构参数组合,要得到完全满足边界条件⑤、⑥及精度要求的荷载作用半径修正系数很难,但是可以符合作用半径对当量模量影响的趋势。考虑实际工程应用,根据图 2 转化模型及计算参数,经过大量计算分析了荷载作用半径  $\delta$  取值在 0.1 m - 0.5 m 时对基顶当量模量的影响,以  $\delta = 0.15$  m 为基准,确定了不同荷载作用半径作用下的影响修正系数  $k_\delta$ (见公式 8.3),误差控制在 3% 以内。

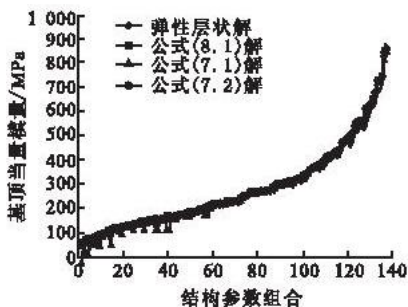


图3 不同换算下当量模量的比较

Fig.3 Equivalent modulus value

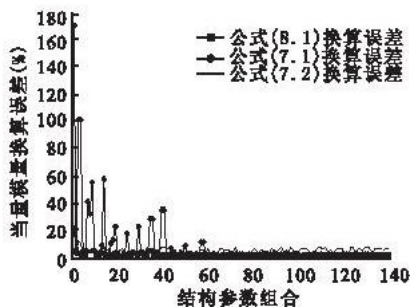


图4 不同换算下当量模量误差的比较

Fig.4 Equivalent modulus error

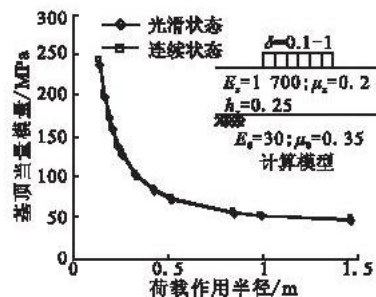


图5 荷载作用半径对当量模量换算的影响

Fig.5 Load radius versus equivalent modulus

$$\begin{cases} k_{\delta} = \left( \frac{\delta}{0.15} \right)^c \\ c = -1.06 + 1.30h_x^{0.15} \left( \frac{E_x}{E_0} \right)^{-0.38} \end{cases} \quad (8.3)$$

不同荷载作用半径下当量结构层与土基光滑和连续接触时,比较通过式(8) - 式(8.3)得到的基顶当量模量与弹性层状体系理论解反算得到的当量模量,见图6、图7。由图可知,荷载作用半径 $\delta$ 在0.1 m - 0.5 m 时,本文公式解与弹性层状理论解在当量结构层与土基光滑和连续接触时的曲线均吻合较好,均具有较高的精度。

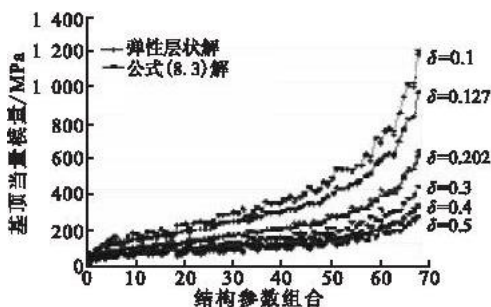


图6 光滑接触时当量模量换算的比较

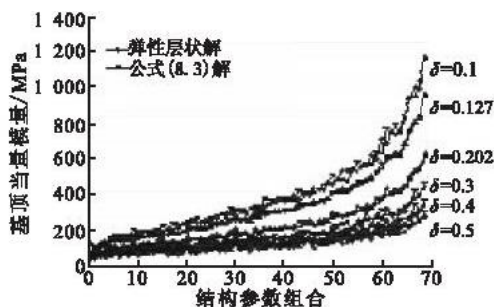
Fig.6 Equivalent modulus value  
under mullly unbonded interface

图7 连续接触时当量模量换算的比较

Fig.7 Equivalent modulus value  
under fully bonded interface

## 4 结论

1) 现有的基顶当量模量换算公式精度不高、外延性较差,不适用于  $E_x/E_0$  偏小或偏大时的换算,如公路规范公式不能满足边界条件① 甚至出现负值的现象,式(7.2)在  $E_x/E_0 > 80$  或  $E_x/E_0 < 6$  且  $h_x < 0.35$  时的换算精度较差。

2) 本文回归分析得到的层间光滑及连续两种状态下基顶当量模量换算公式精度较高、外延性较好,适用于  $E_x/E_0 \geq 2$  且  $h_x \geq 0.2$  时的换算,误差均控制在4%以内。

3) 基顶当量模量换算公式中增加的荷载作用半径修正系数,适用于荷载作用半径在0.1 m 和0.5 m 之间时层间光滑及连续两种状态下的换算,误差均控制在3%以内。

## 参考文献:

- [1] 谈至明. 半结合式双层板弯曲的近似计算[J]. 公路, 2001, 46(4): 25 - 26.  
TAN Zhiming. Simplified Calculation of Bi-layer Plate Bending with Semi-continue Condition[J]. Highway, 2001, 46(4): 25 - 26. (in Chinese)
- [2] 姜爱锋, 姚祖康. 路面结构中地基顶面当量回弹模量的换算[J]. 同济大学学报, 2001, 29(5): 536 - 540.  
JIANG Aifeng, YAO Zukang. Calculation of Surface Equivalent Modulus Subgrade in the Pavement Structure[J]. Journal of

- Tongji University, 2001, 29 (5): 536 - 540. (in Chinese)
- [ 3 ] 翁兴中, 谭麦秋, 孔大庆, 等. 机场水泥混凝土大板接缝设计[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2002, 3(6): 4 - 6.  
WENG Xingzhong, TAN Maiqiu, KONG Daqing, et al. Joint Design of Cement Concrete Large Slab[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2002, 3(6): 4 - 6. (in Chinese)
- [ 4 ] 谈至明, 姚祖康, 刘伯莹. 层状结构顶面当量模量的近似计算[J]. 公路, 2003, 48(8): 5 - 8.  
TAN Zhiming, YAO Zukang, LIU Boying. Approximate Calculation of Equivalent Modulus of End Face of Layered Structures [J]. Highway, 2003, 48(8): 5 - 8. (in Chinese)
- [ 5 ] 翁兴中, 谭麦秋, 黄小明, 等. 机场水泥混凝土道面板尺寸的确定方法[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2003, 4(6): 11 - 13.  
WENG Xingzhong, TAN Maiqiu, HUANG Xiaoming, et al. A Calculating Method of Size of Large Cement Concrete Slab[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2003, 4(6): 11 - 13. (in Chinese)
- [ 6 ] JTG D40—2002, 公路水泥混凝土路面设计规范[S].  
JTG D40—2002, Specifications of Cement Concrete Pavement Design for Highway[S]. (in Chinese)
- [ 7 ] 查旭东. 路面结构层模量反算方法综述[J]. 交通运输工程学报, 2002, 2(4): 12 - 15.  
ZHA Xudong. Summary of Backcalculation Methods of Pavement Layer Moduli[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2002, 2(4): 12 - 15. (in Chinese)
- [ 8 ] 蒋应军, 侯传岭, 秦宪峰, 等. 基层顶面当量回弹模量的换算新方法[J]. 公路交通科技, 2005, 22(5): 38 - 42.  
JIANG Yingjun, HOU Chuanling, QIN Xianfeng, et al. Calculation Method of Composite Resilient Modulus of Foundation under Cement Concrete Pavement[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2005, 22(5): 38 - 42. (in Chinese)
- [ 9 ] 蒋应军, 戴经梁, 陈忠达, 等. 不同等效原则的基层顶面当量回弹模量算法[J]. 长安大学学报: 自然科学版, 2005, 25(3): 1 - 6.  
JIANG Yingjun, DAI Jingliang, CHEN Zhongda, et al. Calculation Method of Equivalent Modulus of Elasticity of Foundation under Principles of Different Equivalence[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2005, 25(3): 1 - 6. (in Chinese)
- [ 10 ] 武和平. 水泥混凝土路面设计土基回弹模量建议值的修正系数研究[J]. 中国公路学报, 1998, 11(4): 1 - 10.  
WU Heping. Research on the Revised Coefficient of the Recommended Value for Earth Subgrade Rebound Modulus in the Design of Rigid Pavement[J]. China Journal of Highway and Transport, 1998, 11(4): 1 - 10. (in Chinese)

(编辑: 姚树峰, 徐敏)

## Modified Calculation Method of Equivalent Modulus of Elasticity of Foundation

WANG Zhen - hui, CAI Liang - cai, GU Qiang - kang, LIU Xiao - jun, WU Ai - hong  
(Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:** The calculation method of equivalent modulus of elasticity of foundation is studied in the principle of displacement equivalence by elastic multi-layer theory, and the boundary conditions are identified and studied based on the analysis of the influence factors for the calculation method of equivalent modulus. The deficiencies in the present calculation methods of equivalent modulus of elasticity of foundation are analyzed. Based on the analysis of great amount of computing data, the calculation expressions are reestablished when the load radius is 15 cm, which has better precision and extension, besides, the modified coefficient of load radius is added. The calculation expressions of equivalent modulus of elasticity of foundation are applicable to the calculation when the ratio of equivalent base modulus to subgrade modulus is greater than 2 and base equivalent thickness is greater than 20cm, and the load radius ranges from 10 cm to 50 cm.

**Key Words:** road engineering; base; elastic multi-layer theory; principle of displacement equivalence; equivalent modulus of elasticity