直觉模糊集的一对分解定理

周　炜，　雷英杰
(空军工程大学　导弹学院，陕西　三原　713800)

摘　要:首先指出了相关研究中给出的直觉模糊集分解定理中被分解的直觉模糊集本身是分解式中的一项且分解式中各项大量重复和某些错误,提出了模糊集或直觉模糊集的分解定理应当把一个模糊集或直觉模糊集表示成与之有关的一族具有某种共同特征的其他模糊集或其他直觉模糊集的并或交的观点。然后在引入模糊集及直觉模糊集的 λ－截积与 λ－截和的基础上给出了直觉模糊集的基本定理,即任一直觉模糊集的所有 λ－截积(强 λ－截积)与 λ－截和(强 λ－截和)仍然是直觉模糊集;并证明了任一模糊集或直觉模糊集等于它的所有 λ－截积(所有强 λ－截积)之并,也等于它的所有 λ－截和(所有强 λ－截和)之交,这些结果分别称为模糊集、直觉模糊集的分解定理。

关键词:模糊集；模糊积；模糊和；直觉模糊集；分解定理

中图分类号：TP182　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009－3516(2009)01－0091－04

由 Atanassov K.[1-4]提出的直觉模糊集是对模糊集理论的重要扩展。直觉模糊集增加了一个非隶属度函数,使其能够配合隶属度函数更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊对象,因而受到学术界的广泛关注。在直觉模糊集研究领域,人们已经证明了 Vague 集是直觉模糊集[5],并已给出了直觉模糊集的若干构造定理和方法[6-7]。遗憾的是,直觉模糊集至今没有一个像模糊集分解定理那样的分解定理。文献[8]的定理 2 给出的 $A=\{<x,\sup\{\alpha|x\in A_{\alpha,\beta}\},\inf\{\beta|x\in A_{\alpha,\beta}\}>|x\in X\}$ 仅仅把 $\mu_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别写成了与其等价的上、下确界形式 $\sup\{\alpha|\mu_A(x)\geqslant\alpha\}$ 和 $\inf\{\beta|v_A(x)\geqslant\beta\}$,对 A 本身并没有做任何分解,因而不能算作是分解定理。该文中基于定理 2 的定理 4 用集合套 $H(\alpha,\beta)$ 给出的 $A=\{<x,\sup\{\alpha|x\in H(\alpha,\beta),\inf\{\beta|x\in H(\alpha,\beta)>x\in X\}$ 也一般不是直觉模糊集,因为它一般不满足条件 $\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$。例如对于 $X=[0,1]$ 上的集合套 $H(\alpha,\beta)$ 和 X 的元素 $x(0.5<x\leqslant 1)$ 有 $\sup\{\alpha|x\in H(\alpha,\beta)+\inf\{\beta|x\in H(\alpha,\beta)\}=2x>1$。可见文献[8]的定理 4 和定理 5 都是错误的。文献[9]给出了直觉模糊集的一个分解定理,但该结果中被分解的直觉模糊集是分解式中的一项,且分解式中的各项大量重复。

模糊集或直觉模糊集的分解定理应当把一个模糊集或直觉模糊集表示成与之有关的一族具有某种共同特征的其他模糊集或其他直觉模糊集的并或交。本文首先引入了任一 $\lambda\in[0,1]$ 与任一 $A\in P(U)$ 的模糊积 $\lambda\odot A$ 与模糊和 $\lambda\oplus A$ 2 种运算,引入了任一 $A\in \mathrm{FS}(U)$ 或 $A\in \mathrm{IFS}(U)$ 的 λ－截积 $\lambda * A$ 、强 λ－截积 $\lambda * A$ 、λ－截和 $\lambda + A$ 、强 λ－截和 $\lambda + A$;给出了模糊集的一对分解定理,其中第 1 个实质上就是现有的模糊集分解定理;在此基础上提出并证明了直觉模糊集的一个基本定理,并由此导出了一对简洁的直觉模糊集分解定理,其分解式中的各项无重复,也不含被分解对象本身。

本文设 U 是非空论域, $P(U)$、$\mathrm{FS}(U)$ 和 $\mathrm{IFS}(U)$ 分别表示 U 的所有经典子集、所有模糊子集和所有直觉模糊子集的族。$A\in P(U)$ 的特征函数总记作 $\chi_A(x)$,因而它的补集 $\bar{A}=U-A$ 的特征函数为 $\chi_{\bar{A}}(x)=1-\chi_A(x)$。$A\in \mathrm{FS}(U)$ 的隶属函数总记作 $A(x)$。并设 I 是任意一个有限、可数或不可数的下标集合。

* **收稿日期**:2007－10－16
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60773209);陕西省自然科学基金资助项目(2006F18)
作者简介:周　炜(1962－),男,陕西凤翔人,副教授,主要从事智能信息处理与信息安全研究;
E－mail：phoenixshaanxi@163.com
雷英杰(1956－),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要从事智能信息处理与智能系统、智能决策等研究.

1 模糊集的分解定理

定义 1 设 $A\in P(U)$,$\lambda\in[0,1]$。定义一对模糊集 $\lambda\odot A,\lambda\oplus A\in FS(U)$ 如下:$(\lambda\odot A)(x)=\min(\chi_A(x),\lambda)=\chi_A(x)\lambda$,$(\lambda\oplus A)(x)=\max(\chi_A(x),\lambda)=\chi_A(x)(1-\lambda)+\lambda$。$\lambda\odot A$ 称为 λ 与 A 的模糊积, $\lambda\oplus A$ 称为 λ 与 A 的模糊和。

定理 1 设 $A_i\in P(U)(i\in I)$,$\lambda\in[0,1]$,则:

1) $\lambda\odot\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(\lambda\odot A_i)$,$\lambda\odot\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(\lambda\odot A_i)$;

2) $\lambda\oplus\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(\lambda\oplus A_i)$,$\lambda\oplus\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(\lambda\oplus A_i)$。

定义 2 设 $A\in FS(U)$,$\lambda\in[0,1]$。U 的经典子集 $A_\lambda=\{x\mid x\in U,A(x)\geqslant\lambda\}$ 称为 A 的 $\lambda-$截集, $A_{\lambda^+}=\{x\mid x\in U,A(x)>\lambda\}$ 称为 A 的强 $\lambda-$截集。U 的模糊子集 $\lambda*A=\lambda\odot A_\lambda$ 与 $\lambda*A=\lambda\odot A_{\lambda^+}$ 分别称为 A 的 $\lambda-$截积与强 $\lambda-$截积; U 的模糊子集 $\lambda+A=\lambda\oplus A_\lambda$ 与 $\lambda+{}^\circ A=\lambda\oplus A_{\lambda^+}$ 分别称为 A 的 $\lambda-$截和与强 $\lambda-$截和。

定义 3[10-11] $A_i\in FS(U)(i\in I)$ 的并 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 与交 $\bigcap_{i\in I}A_i$ 分别按其隶属函数定义如下:

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)(x)=\sup_{i\in I}A_i(x),\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)(x)=\inf_{i\in I}A_i(x)。$$

其中 sup 与 inf 分别表示上确界与下确界。

定理 2 (模糊集的并分解定理) 任一 $A\in FS(U)$ 等于它的所有 $\lambda-$截积之并,等于它的所有强 $\lambda-$截积之并。即 $A=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda*A)=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda*{}^\circ A)$。

定理 3 (模糊集的交分解定理) 任一 $A\in FS(U)$ 等于它的所有 $\lambda-$截和之交,等于它的所有强 $\lambda-$截和之交。即 $A=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda+A)=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda+{}^\circ A)$。

证明:任给 $x\in U$,由定义 1、定义 2,$(\lambda+A)(x)=\chi_{A_\lambda}(x)(1-\lambda)+\lambda=\begin{cases}\lambda, & \lambda>A(x)\\ 1, & \lambda\leqslant A(x)\end{cases}$,因此 $\inf_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda+A)(x)=A(x)$。由定义 3 知 $A=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda+A)$。其余的证明类似。

2 直觉模糊集的基本定理

定义 4 设 $<A^L,A^R>$ 是 U 的一对模糊子集构成的序偶,其隶属函数分别简写为 $\mu_A(x)=A^L(x)$ 和 $v_A(x)=A^R(x)$。如果对于任意的 $x\in U$,都成立 $\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant1$,则称 $<A^L,A^R>$ 是 U 的一个直觉模糊子集,记作 $A=<A^L,A^R>$ 或 $A=<\mu_A,v_A>$。μ_A 和 v_A 分别称为 A 的隶属函数和非隶属函数;函数 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-v_A(x)$ 称为 A 的直觉指数,而 $\pi(A)=\sup_{x\in U}\pi_A(x)$ 称为 A 的直觉度。

显然,当且仅当 $\mu_A(x)+v_A(x)\equiv1$ 时 $\pi(A)=0$。

定理 4 设 $A\in P(U)$,$\lambda\in[0,1]$,则 $<\lambda\odot A,(1-\lambda)\oplus\bar{A}>\in IFS(U)$。

证明:由定义 1 有 $(\lambda\odot A)(x)+((1-\lambda)\oplus\bar{A})(x)=(\chi_A(x)+\chi_{\bar{A}}(x))\lambda+(1-\lambda)\equiv1$,所以由定义 4 知 $<\lambda\odot A,(1-\lambda)\oplus\bar{A}>\in IFS(U)$。

定理 5 (直觉模糊集的基本定理) 设 $A\in IFS(U)$。则对于任意的 $\lambda\in[0,1]$

1) $\lambda*A=<\lambda*A^L,(1-\lambda)+{}^\circ A^R>\in IFS(U)$;

2) $\lambda*{}^\circ A=<\lambda*{}^\circ A^L,(1-\lambda)+A^R>\in IFS(U)$;

3) $\lambda+A=<\lambda+A^L,(1-\lambda)*{}^\circ A^R>\in IFS(U)$;

4) $\lambda+{}^\circ A=<\lambda+{}^\circ A^L,(1-\lambda)*A^R>\in IFS(U)$。

若 $\pi(A)=0$,则 $\pi(\lambda*A)=\pi(\lambda*{}^\circ A)=\pi(\lambda+A)=\pi(\lambda+{}^\circ A)=0$。

证明:只证明 1)、4),其余类似。任给 $x\in U$ 和 $\lambda\in[0,1]$。注意 $\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant1$。

1) 由定义 1、定义 2 知 $(\lambda*A^L)(x)+((1-\lambda)+{}^\circ A^R)(x)=(\chi_{A^L_\lambda}(x)+\chi_{A^R_{(1-\lambda)^+}}(x))\lambda+(1-\lambda)$。

①若 $\mu_A(x)\geqslant\lambda$ 或 $v_A(x)>1-\lambda$,则 $(\lambda*A^L)(x)+((1-\lambda)+{}^\circ A^R)(x)=1$;

②若 $\mu_A(x)<\lambda$ 且 $v_A(x)\leqslant1-\lambda$,则 $(\lambda*A^L)(x)+((1-\lambda)+{}^\circ A^R)(x)=1-\lambda\leqslant1$。

所以 $\lambda*A\in IFS(U)$。若 $\pi(A)=0$,则 $\mu_A(x)<\lambda$ 与 $v_A(x)>1-\lambda$ 等价,不会出现情形②,故 $\pi(\lambda*A)=0$。

4) 由定义 1、定义 2 知 $(\lambda+{}^{\circ}A^{L})(x)+((1-\lambda)*A^{R})(x)=(\chi_{A^{L}_{\lambda+}}(x)+\chi_{A^{R}_{1-\lambda}}(x))(1-\lambda)+\lambda$。

①若 $\mu_A(x)>\lambda$ 或 $v_A(x)\geqslant 1-\lambda$,则 $(\lambda+{}^{\circ}A^{L})(x)+((1-\lambda)*A^{R})(x)=1$;

②若 $\mu_A(x)\leqslant\lambda$ 且 $v_A(x)<1-\lambda$,则 $(\lambda+{}^{\circ}A^{L})(x)+((1-\lambda)*A^{R})(x)=\lambda\leqslant 1$。所以 $\lambda+{}^{\circ}A\in \mathrm{IFS}(U)$。若 $\pi(A)=0$,则 $\mu_A(x)\leqslant\lambda$ 与 $v_A(x)\geqslant 1-\lambda$ 等价,不会出现情形②,故 $\pi(\lambda+{}^{\circ}A)=0$。

定义 5 设 $A\in \mathrm{IFS}(U)$,$\lambda\in[0,1]$。直觉模糊集 $\lambda*A$、$\lambda*{}^{\circ}A$、$\lambda+A$、$\lambda+{}^{\circ}A$ 分别称为 A 的 $\lambda-$截积、强 $\lambda-$截积、$\lambda-$截和、强 $\lambda-$截和。

定义 6 $A_i\in \mathrm{IFS}(U)(i\in I)$ 的并与交分别定义为:

$$\bigcup_{i\in I}A_i=<\bigcup_{i\in I}A_i^{L},\bigcap_{i\in I}A_i^{R}>,\bigcap_{i\in I}A_i=<\bigcup_{i\in I}A_i^{L},\bigcap_{i\in I}A_i^{R}>。$$

定理 6 设 $A_i\in \mathrm{FS}(U)(i\in I)$ 或 $A_i\in \mathrm{IFS}(U)(i\in I)$,$\lambda\in[0,1]$,则:

1) $\lambda*\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(\lambda*A_i)$,$\lambda*\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(\lambda*A_i)$;

2) $\lambda+\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}(\lambda+A_i)$,$\lambda+\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}(\lambda+A_i)$。

3　直觉模糊集的分解定理

定理 7 (直觉模糊集的并分解定理)任一 $A\in \mathrm{IFS}(U)$ 等于它的所有 $\lambda-$截积之并,也等于它的所有强 $\lambda-$截积之并。即 $A=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda*A)=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda*{}^{\circ}A)$。

证明:首先,由定理 2、定理 3 知 $A^{L}=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda*A^{L})$,$A^{R}=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}((1-\lambda)+{}^{\circ}A^{R})$。再由定理 5、定义 6 知 $\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda*A)=<\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda*A^{L}),\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}((1-\lambda)+{}^{\circ}A^{R})>=<A^{L},A^{R}>=A$。其余证明略。

定理 8 (直觉模糊集的交分解定理) 任一 $A\in \mathrm{IFS}(U)$ 等于它的所有 $\lambda-$截和之交,也等于它的所有强 $\lambda-$截和之交。即 $A=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda+A)=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda+{}^{\circ}A)$。

证明:首先,由定理 2、定理 3 知 $A^{L}=\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda+A^{L})$,$A^{R}=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}((1-\lambda)*{}^{\circ}A^{R})$。再由定理 5、定义 6 知 $\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda+A)=<\bigcap_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda+A^{L}),\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}((1-\lambda)*{}^{\circ}A^{R})>=<A^{L},A^{R}>=A$。其余证明略。

4　结论

本文给出了直觉模糊集的一对重要的分解定理,它们与模糊集的分解定理是一脉相承的。定理 5 之所以被称为直觉模糊集的基本定理,是因为它是直觉模糊集分解定理的理论基础,同时也提供了由一个给定直觉模糊集构造一系列其它直觉模糊集的方法。这些定理具有一定的理论价值。

参考文献:

[1] Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1986, 20(1):87-96.

[2] Atanassov K. More on Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1):37-46.

[3] Atanassov K. Two Theorems for Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,2000, 110 (2): 267-269.

[4] Atanassov K. Remarks on the Intuitionistic Fuzzy Sets - III [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 75 (3): 401-402.

[5] Bustince H, Burillo P. Vague Sets are Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems ,1996, 79 (3): 403-405.

[6] Burillo P, Bustince H. Construction Theorems for Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems ,1996, 84 (2): 271-281.

[7] Bustince H. Construction of Intuitionistic Fuzzy Relations with Predetermined Properties[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000,109 (3):379-403.

[8] 王艳平, 盖如栋. 直觉模糊集合的基本定理[J]. 辽宁工程技术大学学报:自然科学版, 2001, 20(5): 607-608.
WANG Yanping, GAI Rudong. The Basic Theorem of Intuitionstic Fuzzy Sets [J]. Journal of Liaoning Technical University : Natural Science Edition,2001, 20(5): 607-608. (in Chinese)

[9] 刘华文. 直觉 Fuzzy 集的基本定理[J]. 工科数学, 2000, 16(1):56-60.
LIU Huawen. Basic Theorems of the Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Journal of Mathematics for Technology, 2000, 16(1):56-60. (in Chinese)

[10] 雷英杰, 孙金萍, 王宝树. 模糊知识处理与模糊集理论的若干拓展[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2004,5(3):40-43.
LEI Yingjie, SUN Jinping, WANG Baoshu. On the Fuzzy Knowledge Processing and Extensions of Fuzzy Sets Theory[J]. Journal of Air Force Engineering University:Natural Science Edition, 2004,5(3):40-43. (in Chinese)

[11] 汪培庄. 模糊集合论及其应用[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1986.
WANG Peizhuang. Fuzzy Set Theory and Its Applications [M]. Shanghai:Scientific and Technical Publishers, 1986. (in Chinese)

(编辑:徐楠楠)

A Pair of Decomposition Theorems of Intuitionistic Fuzzy Sets

ZHOU Wei, LEI Ying-jie
(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: First of all an error in Reference is pointed out. It is also pointed out that in the results of the intuitionistic fuzzy set being decomposed itself appears in the decomposition as a constructive team and a great deal of teams in the decomposition are repeated. A standpoint is put forward that a decomposition theorem of a (intuitionistic) fuzzy set expresses the (intuitionistic) fuzzy set as a union or an intersection of a family of other (intuitionistic) fuzzy sets which are related to the (intuitionistic) fuzzy set and have some common characteristic. And then on the basis of introducing concepts of -cut products (strong -cut products) and -cut sums (strong -cut sums) of fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets, a fundamental theorem of intuitionistic fuzzy sets is given which shows that all the -cut products and -cut sums (go without saying, strong -cut products and strong -cut sums) of any intuitionistic fuzzy set are still intuitionistic fuzzy sets. It also proves that any fuzzy set or intuitionistic fuzzy set is equal to the union of all the -cut products (all the strong -cut products) as well as equal to the intersection of all the -cut sums (all the strong -cut sums) of it, these results are respectively called the decomposition theorems of fuzzy sets and intuitionistic fuzzy sets.

Key words: fuzzy set; fuzzy product; fuzzy sum; intuitionistic fuzzy set; decomposition theorem

(上接第 90 页)

Combinational Construction of Self-orthogonal Codes and Its Application

LIU Nai-gong[1], GUO Luo-bin[1], LIU Jian[2]
(1. Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, 710051, China; 2. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: Quantum error-correcting codes protect quantum information against undesirable noise in quantum computation and quantum communication. It is one of important problems that constructing very good quantum codes. There are two methods that use binary codes to construct quantum codes, one is CSS construction, another is Steane construction. These two methods are all based on the construction of binary self-orthogonal codes. Combinational construction of binary self-orthogonal codes is investigated in this paper. From known codes chains of binary self-orthogonal codes and their dual codes chains with given dual distance, new binary self-orthogonal codes of dual distance three, four, five and six are constructed. Based on these results, for each satisfying , S-chains with parameters and are constructed. According to Steane's construction, many very good quantum codes of distance five and six are constructed by the obtained S-chains, some of these quantum codes are new and some of these quantum codes have improved parameters than previously known codes.

Key words: self-orthogonal codes; S-chains; quantum error-correcting codes