

二维电磁晶体带隙结构的PWE法分析

付树洪, 田海林, 童创明, 李西敏
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要:针对常见的电磁晶体带隙分析方法存在耗时、不易理解等问题,推导了二维电磁晶体的平面波展开法(Plane Wave Expansion, PWE)模型,并采用平面波展开法分析了不同形状填充单元二维方格子电磁晶体的带隙结构。将电场(或磁场)、介电常数(或其倒数)展开为双重傅里叶级数,然后将其代入所满足的标量波动方程中,经过运算整理得出二维电磁晶体的本征方程,求解该方程,就可得到电磁晶体的带隙结构。计算结果表明,填充单元尺寸和相对介电常数均对带隙结构存在影响。最后,采用周期延拓,得出了两种电磁晶体的等效结构。通过结构等效,无需再推导相应电磁晶体的结构系数,利用本文的平面波展开法模型即可实现其带隙结构的求解,因而实现了简化分析。仿真数据与文献中的实验数据对比,验证了本方法的有效性。

关键词:平面波展开法;电磁晶体;带隙结构;周期延拓;等效结构

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2008)04-0069-05

电磁带隙(Electromagnetic band-gap, EBG)材料,又称电磁晶体或光子带隙(Photonic band-gap, PBG)材料,是一种介电常数周期性变化的结构。这种周期性结构的一个重要特征就是其具有带隙特性,当频率处于带隙内的电磁波入射时,电磁晶体将阻碍其通过。这使电磁晶体的应用范围变得十分广泛,利用电磁晶体可制成滤波器^[1]、低阈值激光器^[2]、高方向性天线^[3-4]等。电磁晶体的理论分析方法有很多种,如矩量法(MOM)^[1,5]、传输矩阵法(TMM)^[6-7]、时域有限差分法(FDTD)^[8-9]等。研究发现,采用MOM分析二维电磁晶体,其本征方程的求解相当耗时^[10];采用TMM分析,需要对麦克斯韦方程进行有限差分等一系列处理,理解起来存在困难;采用FDTD分析,虽然可以得出很大频率范围的透过率谱,但其计算量很大。

本文旨在介绍一种原理简单且易于编程的方法——PWE法,研究二维方格子排列空气柱和介质柱的带隙结构。由此,可以确定此类结构电磁晶体的设计思路。对于十字形结构空气柱和介质柱电磁晶体,采用周期延拓,可以看出其可以等效为空气方柱和介质方柱形电磁晶体,利用已有的平面波展开法模型即可实现对其带隙结构的求解,因而无需再推导相应电磁晶体的结构系数,实现了简化分析。

1 理论方法

1.1 本征方程的推导

如图1(a)所示,二维电磁晶体由 x, y 方向周期性排列的介质柱组成。图中,灰色代表相对介电常数为 ϵ_r 、磁导率为 μ_0 的介质圆柱(图1(b)),白色背景为空气, b 为介质柱的直径, a 为 x, y 方向的周期, ϕ 为入射角。典型的填充单元还有空气圆柱(图1(c))、空气方柱(图1(d))和介质方柱(图1(e)),其中 b 为填充方柱的边长。

收稿日期:2007-07-29

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2005F23)

作者简介:付树洪(1982-),男,四川简阳人,博士生,主要从事新型电磁材料研究;E-mail:chmtong@126.com
童创明(1964-),男,湖北黄冈人,教授,博士生导师,主要从事雷达目标特性、电磁场数值计算研究。

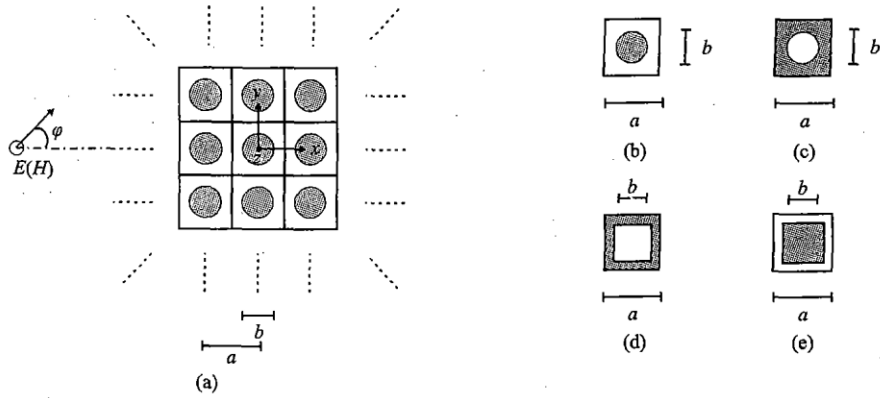


图1 方格子电磁晶体横截面图及典型周期单元

Fig. 1 Cross-sectional view of electromagnetic crystals with square lattice and representative unit cells

以TMz入射为例,电磁波入射情况如图1(a)所示。在TMz入射时,电场只有z轴分量。假设介质柱在z轴方向上无限长,其对应的电场标量波动方程可简化为

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z(x, y) = k_0^2 \varepsilon_r(x, y) E_z(x, y) \quad (1)$$

式中: $E_z(x, y) = E_p(x, y) e^{-jk_{x_0}x} e^{-jk_{y_0}y}$, $E_p(x, y)$ 为在 $x-y$ 平面传播的周期性电场; 传播常数 $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $\omega = 2\pi f$ 为本征角频率; 入射波在 z 方向的波数 $k_z = 0$, k_{x_0} 和 k_{y_0} 分别是 x 方向和 y 方向的 0 阶 Floquet 谐波; $\varepsilon_r(x, y)$ 为相对介电常数。

设电场和介电常数均为周期性分布, 将其按双重 Fourier 级数展开为

$$E_p(x, y) = \sum_n \sum_q a_{nq} e^{-j\frac{2\pi n}{a}x} e^{-j\frac{2\pi q}{a}y} \quad (2) \quad \varepsilon_r(x, y) = \sum_m \sum_p b_{mp} e^{-j\frac{2\pi m}{a}x} e^{-j\frac{2\pi p}{a}y} \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1), 经过代数运算可得

$$\sum_n \sum_q \left[\left(\frac{2\pi n}{a} + k_{x_0} \right)^2 + \left(\frac{2\pi q}{a} + k_{y_0} \right)^2 \right] a_{nq} e^{-j\frac{2\pi n}{a}x} e^{-j\frac{2\pi q}{a}y} = k_0^2 \sum_m \sum_p b_{mp} e^{-j\frac{2\pi m}{a}x} e^{-j\frac{2\pi p}{a}y} \sum_n \sum_q a_{nq} e^{-j\frac{2\pi n}{a}x} e^{-j\frac{2\pi q}{a}y} \quad (4)$$

将式(4)两边同乘正交函数 $e^{j\frac{2\pi k}{a}x} e^{-j\frac{2\pi l}{a}y}$, 并在一个周期单元内积分, 整理后得 TMz 波入射时的本征方程为

$$a_{nq} \left[\left(\frac{2\pi n}{a} + k_{x_0} \right)^2 + \left(\frac{2\pi q}{a} + k_{y_0} \right)^2 \right] = k_0^2 \sum_m \sum_p b_{mp} b_{n-m, q-p} \quad (5)$$

依照图1中所示4种单元的顺序, 式(5)中对应结构系数 $b_{n-m, q-p}$ 依次为

$$b_{n-m, q-p} = \delta_{n-m, q-p} + 2f_i(\varepsilon_r - 1) \frac{J_1(Gr)}{Gr} \quad (6a) \quad b_{n-m, q-p} = \varepsilon_r \delta_{n-m, q-p} - 2f_i(\varepsilon_r - 1) \frac{J_1(Gr)}{Gr} \quad (6b)$$

$$b_{n-m, q-p} = \varepsilon_r \delta_{n-m, q-p} - f_i(\varepsilon_r - 1) \operatorname{sinc} \frac{\pi(n-m)b}{a} \operatorname{sinc} \frac{\pi(q-p)b}{a} \quad (6c)$$

$$b_{n-m, q-p} = \delta_{n-m, q-p} + f_i(\varepsilon_r - 1) \operatorname{sinc} \frac{\pi(n-m)b}{a} \operatorname{sinc} \frac{\pi(q-p)b}{a} \quad (6d)$$

式中: δ 为 Kronecker 符号; $r = b/2$ 表示填充空气(或介质)圆柱半径; J_1 为第一阶贝塞尔函数(Bessel Function); $G = \sqrt{\left(\frac{2\pi(n-m)}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi(q-p)}{a} \right)^2}$; $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$; 对于填充空气柱(或介质)圆柱, 填充率 $f_i = \frac{\pi r^2}{a^2}$; 对于填充空气(或介质)方柱, 填充率 $f_i = \frac{b^2}{a^2}$ 。

对于TEz入射时, 推导过程与TMz入射相类似, 不同在于它是将磁场和介电常数的倒数展开为双重 Fourier 级数, 代入的是关于磁场的标量波动方程, 经过运算简化可得本征方程为

$$k_0^2 a_{nq} = \sum_n \sum_q a_{mp} b_{n-m} b_{n-m, q-p} \left[\left(\frac{2\pi n}{a} + k_{x_0} \right)^2 + \left(\frac{2\pi q}{a} + k_{y_0} \right)^2 - \frac{2\pi(n-m)}{a} \left(\frac{2\pi n}{a} + k_{x_0} \right) - \frac{2\pi(q-p)}{a} \left(\frac{2\pi n}{a} + k_{x_0} \right) \right] \quad (7)$$

将式(6)中的介电常数代换为其倒数形式即为式(7)中结构系数的表达式。

1.2 本征方程的求解

在求解本征方程之前,首先介绍正方格子对应的简约布里渊区(Irreducible Brillouin Zone)。如图 2 所示,灰色三角形部分是二维方格子电磁晶体的简约布里渊区,这个区域被 Γ 、 X 、 M 3 个几何点所定义,各几何点的取值如图 2 所示。为求解电磁晶体的传播模式,要求传播常数 $k = k_{x,0}\hat{x} + k_{y,0}\hat{y}$ 依次在简约布里渊区的 3 条边上采样,代入本征方程式(5)或式(7),求解对应本征方程的特征值^[1],就可得到传播常数与归一化频率的关系。

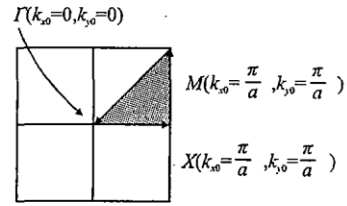


图 2 简约布里渊区

Fig. 2 Irreducible Brillouin zone (BZ)

2 实例与分析

为了便于同文献进行比较,首先计算一个二维电磁晶体结构:填充介质柱半径为 0.5 cm,相对介电常数为 4.55,周期 $a = 2$ cm,按正方形网格排列,以 361 个平面波展开。图 3(a)是利用本文方法计算得出的带隙结构。从图中可以得到,第一带隙沿着 ΓX 方向的下限频率约为 4.8 GHz,上限频率约为 6.7 GHz。文献[6]中测量了该电磁晶体沿 ΓX 方向的频率 - 透过率谱图,如图 3(b)所示。由图 3 可见,中间低的区域对应电磁晶体的带隙和计算结果吻合较好(对于透过率谱图,第一带隙是由其 -20 dB 带宽定义的),从而验证了本方法的正确性。

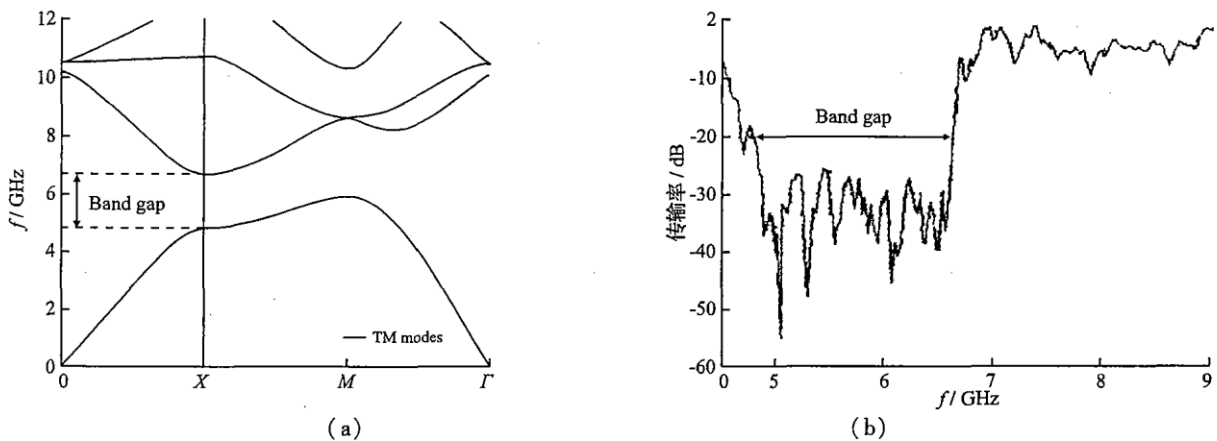


图 3 二维电磁晶体 TMz 模式带隙结构及频率 - 透过率谱图

Fig. 3 Band gap structure (TMz) for 2 - D electromagnetic crystals and frequency against transmitted power

下面利用此方法求解图 1 所示的 4 种方格子电磁晶体结构的带隙。参数选择如下:如图 1(b)、图 1(c)所示的介质柱型, $b/a = 0.4$;如图 1(d)、图 1(e)所示的空气柱型, $b/a = 0.6$; $\epsilon_r = 8.9$, 以 225 个平面波展开。数值仿真结果如图 4 所示,图中横轴表示归一化传播常数,单位为 1,其中 $[0, 3.14]$ 表示 ΓX 段, $[3.14, 6.28]$ 表示 XM 段, $[6.28, 9.42]$ 表示 $M\Gamma$ 段;纵轴表示归一化频率,单位为 1;灰带表示带隙 (band - gap)。

对比图 4(a)、图 4(c)可以看出,填充尺寸对偶时,介质方柱型电磁晶体存在横磁波带隙(TM band gap),而空气方柱存在横电波带隙(TE band gap)。由图 4(d)可以看出空气圆柱没有带隙存在,这是由于参数选择的问题,只要对参数进行调整,就可出现带隙,下面将对其进行讨论。

下面分析影响二维电磁晶体带隙的因素。以空气圆柱型为例,如图 1(c),分别讨论填充单元尺寸 b/a 、介电常数对带隙的影响。选择电磁晶体的参数为: $b/a = 0.8$, $\epsilon_r = 8.9$, 以 225 个平面波展开,仿真计算结果如图 5(a)。选择电磁晶体的参数为: $b/a = 0.6$, $\epsilon_r = 13$, 以 225 个平面波展开,仿真计算结果如图 5(b)。

对照图 4(d)与图 5(a)可知,相对介电常数保持不变,增大填充尺寸,使原来没有带隙的电磁晶体出现了带隙;对照图 4(d)与图 5(b),填充尺寸保持不变,增大相对介电常数,带隙同样出现。由此可以得出结论,介电常数或填充尺寸对电磁晶体结构的带隙特性存在影响,大介电常数或大填充尺寸的电磁晶体易出现带隙,这为电磁晶体的设计提供了思路。

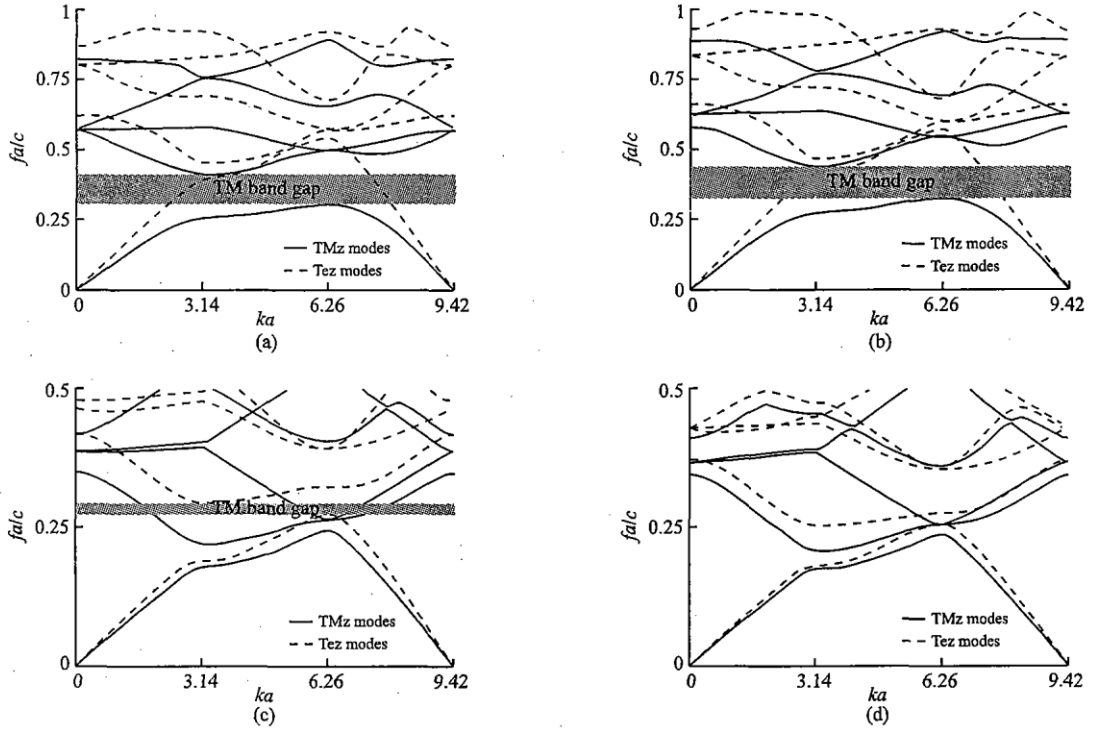


图4 方格子电磁晶体带隙结构图

Fig. 4 Band gap structure for electromagnetic crystals with square lattices

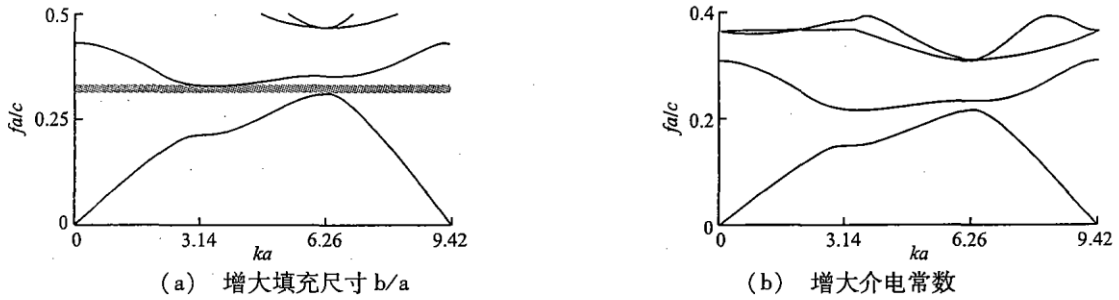


图5 不同参数下空气圆柱电磁晶体带隙结构图

Fig. 5 Band gap structure for air columns electromagnetic crystals with different parameters

另外,在分析十字形单元二维电磁晶体的带隙结构时,若此类结构周期个数较大时,可利用其等效结构——介质(或空气)方柱型电磁晶体的平面波展开法模型分析它们的带隙特性,而此模型在本文中已经给出,所以无需再进行相关的理论推导。如图6(a)所示,将周期单元向两个周期方向延伸,十字形空气(或介质)柱就可等效为介质(或空气)方柱结构,虚线所围即表示等效结构,图6(b)表示其对应等效关系。

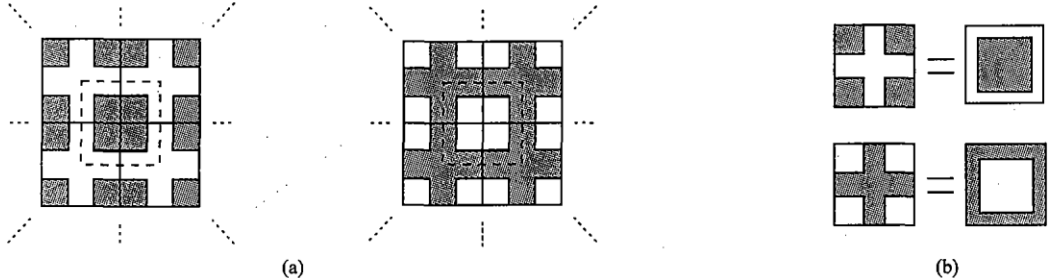


图6 周期延拓及对应等效关系

Fig. 6 Periodic prolongation and equivalent corresponding relationship

3 结论

本文推导了二维方格子电磁晶体的PWE法模型,并利用其对不同填充形状二维方格子电磁晶体的带隙结构进行了分析。计算结果表明,填充尺寸和介电常数均对带隙结构存在影响。由此可以根据实际需要,调

整这些参数,设计出满足特定带隙要求的电磁晶体结构。在分析十字形电磁晶体结构时,采用周期延拓可以将其等效为方柱形电磁晶体结构,因而只需利用本文介绍的求解模型即可实现对其带隙结构的分析,无需再进行理论推导。仿真计算数据与文献中实验数据的对比结果,验证了方法的正确性。

由于本文模型所能分析的结构只限于前面所提到的几种,而电磁晶体的结构又远不止这些。因此,如何求解任意形状二维电磁晶体的带隙结构是下一步将要开展的工作。

参考文献:

- [1] Shumpert J D. Modeling of Periodic Dielectric Structures (Electromagnetic Crystals) [D]. Michigan: University of Michigan, 2001.
- [2] Danner A J. Photonic Crystal Modeling and Fabrication in Gallium Arsenide Materials [D]. Illinois : University of Illinois, 2002.
- [3] LIN Qingchun, ZHU Fangming, HE Sailing. A New Photonic Bandgap Cover for a Patch Antenna with A Photonic Bandgap Substrate [J]. Journal of Zhejiang University Science. 2004, 5(3) : 269 - 273.
- [4] Ramón Gonzalo, Peter de Maagt , Mario Sorolla. Enhanced Patch - Antenna Performance by Suppressing Surface Waves Using Photonic - Bandgap Substrates [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques, 1999, 47(11) : 2131 - 2138.
- [5] Zhang Lijun. Numerical Characterization of Electromagnetic Band - Gap Materials and Applications in Printed Antennas and Arrays [D]. California: University of California, 2000.
- [6] 梅洛勤. 用传输矩阵法(TMM)研究光子晶体的传输特性 [D]. 长沙:国防科技大学, 2002.
MEI Luoqin. Study on Transmission Properties of Photonic Crystals by Using Transfer Matrix Method (TMM) [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2002. (in Chinese)
- [7] 王 辉, 李永平. 用特征矩阵法计算光子晶体的带隙结构 [J]. 物理学报, 2001, 50(11) : 2172 - 2178.
WANG Hui, LI Yongping. An Eigen Matrix Method for Obtaining the Band Structure of Photonic Crystals [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(11) : 2172 - 2178. (in Chinese)
- [8] 何晓东, 刘大力, 吴东江, 等. 电磁波在一维光子晶体中的传播 [J]. 长春邮电学院学报, 1999, 17(3) : 36 - 39.
HE Xiaodong, LIU Dali, WU Dongjiang, et al. Wave Propagation in One Dimension Photonic Crystals [J]. Journal of Changchun Post and Telecommunication Institute, 1999, 17(3) : 36 - 39. (in Chinese)
- [9] 朱志宏. 用时域有限差分法(FDTD)研究光子晶体传输特性 [D]. 长沙:国防科技大学, 2002.
ZHU Zhihong. Study on Transmission Properties of Photonic Crystals by Using Finite - difference Time - domain (FDTD) [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2002. (in Chinese)
- [10] 付树洪. 电磁晶体带隙分析及其应用研究 [D]. 西安:空军工程大学, 2008.
FU Shuhong. Analysis of Band - gaps for Electromagnetic Crystals and Its Application [D]. Xi'an: Air Force Engineering University, 2008. (in Chinese)

(编辑:田新华)

Analysis of Band Structure of Two - dimensional Electromagnetic Crystal Using PWE Method

FU Shu - hong, TIAN Hai - lin, TONG Chuang - ming, LI Xi - min

(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: Aimed at the problems, of analysis on band gap of electromagnetic crystal using usual method, such as time - consuming, hard to be understood, a model of plane wave expansion (PWE) method is introduced in this paper and the plane wave expansion method is adopted to analyze the band gap structure of two - dimensional electromagnetic crystal with different shape of filling cell. By using this method, electrical field or magnetic field and dielectric constant or its reciprocal are expanded in the form of double Fourier series, which are then substituted into the scalar wave equation they must fulfill. Again, a characteristic equation for 2 - D electromagnetic crystal is achieved, and by solving it the band gap structure is obtained. Moreover, two equivalent structures are introduced. The results of calculation show that the size of filling cell and the relative dielectric constant all have influence on band gap structure. Comparison between the numerical solution and literature data indicates that the method in this paper is valid. At last, two equivalent structures are obtained by using periodic prolongation. It is not required to deduce the structure coefficients, and the analysis of band gap structure using the model of plane wave expansion method is realized, so simplification of analysis is achieved.

Key words: plane wave expansion method; electromagnetic crystal; band gap structure; periodic prolongation; equivalent structures