第9卷第2期　　空军工程大学学报(自然科学版)　　Vol.9 No.2
2008年4月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Apr. 2008

Banach空间一类非线性算子方程解的存在唯一性

郝建丽
(商丘师范学院 数学系，河南 商丘 476000)

摘　要:利用锥理论和非对称迭代方法,研究了半序Banach空间一类不具有连续性和紧性条件的非线性算子方程$A(x,x)+u_0=Bx$解的存在唯一性,并给出迭代序列收敛于解的误差估计,所得结果是某些已有结果的本质改进和推广。非对称迭代方法是解决微积分方程的又一有效方法,它能够解决半序空间中对称迭代法无能为力的问题。

关键词:锥与半序;算子方程;混合单调算子

中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2008)02-0092-03

混合单调算子是一类重要的算子,广泛存在于非线性积分方程和微分方程的研究中。关于算子方程$A(x,x)=x$可解性研究已有较多结果[1-6],但对$A(x,x)+u_0=Bx$这类算子方程的可解性讨论却不多见,本文对算子的连续性和紧性[7]不作任何假定,利用锥理论和单调迭代技巧[8-9],讨论了一类算子方程$A(x,x)+u_0=Bx$解的存在唯一性,给出迭代序列收敛于解的误差估计,并推广了现有文献的一些结论。

1　预备知识

本文总假设E为具有正规锥P的半序实Banach空间,θ表示E中的零元素,N为P的正规常数,关于锥和半序理论参见文献[10-11]。设$u_0,v_0\in E$且$u_0<v_0$,用$D=[u_0,v_0]$表示E中的序区间。

1)称二元算子$A:D\times D\to E$为混合单调算子,如果$A(x,y)$对每一个固定的$y\in D$关于x是增的,对每一个固定的$x\in D$关于y是减的;

2)设$A:D\times D\to E$是二元算子,若存在常数$\alpha\in(0,1)$使得对任意的$x,y\in D,x\leqslant y$,有$A(y,x)-A(x,y)\leqslant\alpha(y-x)$,则称$A$为序压缩算子;

3)称A在D上对称压缩,若存在常数$\beta\in(0,1)$使得对任意的$x,y\in D,x\leqslant y$,有$\|A(y,x)-A(x,y)\|\leqslant\beta\|y-x\|$。

2　主要结果

定理1　设P是实Banach空间E中正规锥,$A:D\times D\to E$是混合单调算子,且A是序压缩的,而$B:E\to E$是连续的非线性算子,且满足下列条件:

1)若存在$b\in[0,1]$,且$0<\alpha+b<1$,满足初始条件

$$\theta\leqslant A(u_0,v_0),\ A(v_0,u_0)\leqslant(1-b)(v_0-u_0) \tag{1}$$

2)对任意的$u_0\leqslant u\leqslant v\leqslant v_0$,有$A(u,v)+u_0\leqslant Bu\leqslant Bv\leqslant A(v,u)+u_0$,则方程$A(x,x)+u_0=Bx$在$[u_0,v_0]$中有唯一解$x^*$,且对迭代序列

$$u_{n+1}=A(u_n,v_n)+u_0,v_{n+1}=A(v_n,u_n)+b(v_n-u_n)+u_0,\ n=0,1,\cdots \tag{2}$$

收稿日期:2007-09-17
基金项目:河南省教委科研基金资助项目(200410483004)
作者简介:郝建丽(1972-),女,河南商丘人,讲师,主要从事非线性泛函分析及其应用研究.
E-mail:haojianli8888@163.com

有误差估计:

$$\| x^* - u_n(\text{或} v_n) \| \leqslant N(\alpha + b)^n \| v_0 - u_0 \| \tag{3}$$

证明　运用归纳法易证

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \tag{4}$$

事实上,当 $n=1$ 时,由式(1)、(2)及 A 是混合单调算子,有 $u_1 = A(u_0, v_0) + u_0 \geqslant \theta + u_0$, $v_1 = A(v_0, u_0) + b(v_0 - u_0) + u_0 \leqslant (1-b)(v_0 - u_0) + b(v_0 - u_0) + u_0 = v_0$; $v_1 - u_1 = A(v_0, u_0) - A(u_0, v_0) + b(v_0 - u_0) \geqslant \theta$, 即 $u_0 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0$,式(4)成立。

假设 $n=k$ 时,式(4)也成立,即 $u_{k-1} \leqslant u_k \leqslant v_k \leqslant v_{k-1}$, 则当 $n=k+1$ 时,有 $u_k = A(u_{k-1}, v_{k-1}) + u_0 \leqslant A(u_k, v_k) + u_0 = u_{k+1} \leqslant A(v_k, u_k) + u_0 \leqslant A(v_k, u_k) + b(v_k - u_k) + u_0 = v_{k+1} \leqslant A(v_{k-1}, u_{k-1}) + b(v_{k-1} - u_{k-1}) + u_0 = v_k$; 即 $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$,故 $n=k+1$ 时式(4)成立。

由式(2),(4)和 A 是序压缩可得

$$\theta \leqslant v_n - u_n \leqslant A(v_{n-1}, u_{n-1}) + b(v_{n-1} - u_{n-1}) + u_0 - A(u_{n-1}, v_{n-1}) - u_0 \leqslant (v_{n-1} - u_{n-1}) + b(v_{n-1} - u_{n-1}) = (\alpha + b)(v_n - 1 - u_{n-1}) \leqslant (\alpha + b)^2 (v_{n-2} - u_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant (\alpha + b)^n (v_0 - u_0) \tag{5}$$

考虑到 P 的正规性可知

$$\| v_n - u_n \| \leqslant N \| (\alpha + b)^n (v_0 - u_0) \| \leqslant N (\alpha + b)^n \| v_0 - u_0 \| \tag{6}$$

故由式(4)知,对任意正数 n,p 有 $\theta \leqslant u_{n+p} - u_n, v_n - v_{n+p} \leqslant v_n - u_n \leqslant (\alpha + b)^n (v_0 - u_0)$,对任给的 $0 < b + \alpha < 1$,从而由式(6)与 P 的正规性知 $\| u_{n+p} - u_n \| \leqslant \| v_n - u_n \| \leqslant N(\alpha + b)^n \| v_0 - u_0 \| \to 0, (n \to \infty)$。所以 $\{u_n\}$ 是Cauchy序列,由 E 的完备性及 $\{u_n\} \in [u_0, v_0]$, 存在 $u^* \in [u_0, v_0]$, 使 $u_n \to u^*, (n \to \infty)$,同理可证 $\{v_n\}$ 也是Cauchy列。于是存在 $v^* \in [u_0, v_0]$,使 $v_n \to v^*, (n \to \infty)$。事实上, $u_n \leqslant u^* \leqslant v^* \leqslant v_n$, 再由 $\theta \leqslant v^* - u^* \leqslant v_n - u_n$ 与锥 P 的正规性易知 $u^* = v^* \equiv x^*$,所以 $u_n \leqslant x^* \leqslant v_n$。

又由2)、式(2)、$u_n \leqslant x^* \leqslant v_n$ 及 A 是混合单调算子有:

$$u_{n+1} = A(u_n, v_n) + u_0 \leqslant Bu_n \leqslant Bv_n \leqslant A(v_n, u_n) + u_0 \leqslant A(v_n, u_n) + \alpha(v_n - u_n) + u_0 = v_{n+1}$$

$$u_{n+1} = A(u_n, v_n) + u_0 \leqslant A(x^*, x^*) + u_0 \leqslant A(v_n, u_n) + u_0 \leqslant A(v_n, u_n) + x(v_n - u_n) + u_0 = v_{n+1}$$

由锥 P 的正规性及上面两式知道 $\lim\limits_{n\to\infty} A(u_n, v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A(v_n, u_n) = A(x^*, x^*)$,从而又由 B 的连续性可得 $Bx^* = A(x^*, x^*) + u_0$,即 x^* 是方程 $A(x,x) + u_0 = Bx$ 在 $[u_0, v_0]$ 中的解,解的唯一性利用常规方法易得。

误差估计式(3)易由式(6)得出。

定理2　设 P 是实Banach空间 E 中正规锥, $A: D \times D \to E$ 是混合单调算子,且 A 是序压缩,而 $B: E \to E$ 是连续的非线性算子,且满足下列条件:

1)若存在 $b \in [0,1]$,且 $0 < \alpha + b < 1$,满足初始条件: $(1-b)(u_0 - v_0) \leqslant A(u_0, v_0)$, $A(v_0, u_0) \leqslant \theta$;

2)对任意的 $u_0 \leqslant u \leqslant v \leqslant v_0$,有 $A(u,v) + v_0 \leqslant Bu \leqslant Bv \leqslant A(v,u) + v_0$,则方程 $A(x,x) + v_0 = Bx$ 在 $[u_0, v_0]$ 中有唯一解 x^*,且对迭代序列

$$u_{n+1} = A(u_n, v_n) + b(u_n - v_n) + v_0, v_{n+1} = A(v_n, u_n) + v_0, \ n = 0,1,2,\cdots$$

有误差估计 $\| x^* - u_n(\text{或} v_n) \| \leqslant N(\alpha + b)^n \| v_0 - u_0 \|$。

证明　类似于定理1的证明,略。

仿定理1的证明有下面结论。

定理3　设 P 是实Banach空间 E 中正规锥, $A: D \times D \to E$ 是混合单调算子,且 A 是对称压缩的,而 $B: E \to E$ 是连续的非线性算子,且满足下列条件:

1)若存在 $b \in [0,1]$,且 $0 < \beta + b < 1$,满足初始条件

$$\theta \leqslant A(u_0, v_0), \ A(v_0, u_0) \leqslant (1-b)(v_0 - u_0);$$

2)对任意的 $u_0 \leqslant u \leqslant v \leqslant v_0$,有 $A(u,v) + u_0 \leqslant Bu \leqslant Bv \leqslant A(v,u) + u_0$。

则方程 $A(x,x) + u_0 = Bx$ 在 $[u_0, v_0]$ 中有唯一解 x^*,且对迭代序列

$$u_{n+1} = A(u_n, v_n) + u_0, v_{n+1} = A(v_n, u_n) + b(v_n - u_n) + u_0, \ n = 0,1,\cdots$$

有误差估计

$$\| x^* - u_n(\text{或} v_n) \| \leqslant N(\beta + b)^n \| v_0 - u_0 \|$$

定理4　设 P 是实Banach空间 E 中正规锥, $A: D \times D \to E$ 是混合单调算子,且 A 是对称压缩,而 $B: E \to E$

是连续的非线性算子,且满足下列条件:

1)若存在 $b\in[0,1]$,且 $0<\beta+b<1$,满足初始条件:$(1-b)(u_0-v_0)\leqslant A(u_0,v_0)$,$A(v_0,u_0)\leqslant\theta$;

2)对任意的 $u_0\leqslant u\leqslant v\leqslant v_0$,有 $A(u,v)+v_0\leqslant Bu\leqslant Bv\leqslant A(v,u)+v_0$。

则方程 $A(x,x)+v_0=Bx$ 在$[u_0,v_0]$中有唯一解 x^*,且对迭代序列

$$u_{n+1}=A(u_n,v_n)+b(u_n-v_n)+v_0,v_{n+1}=A(v_n,u_n)+v_0,\ n=0,1,\cdots$$

有误差估计 $\|x^*-u_n(\text{或}v_n)\|\leqslant N(\beta+b)^n\|v_0-u_0\|$。

注:本文结论对算子 A 在连续性,紧性方面没有做任何假定。

参考文献:

[1] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Coupled Fixed Points of Nonlinear Operators with Applications[J]. Nonlinear Anal TMA, 1987, 11(5): 623~632.

[2] 张庆政. 序对称压缩算子方程的迭代求解及其应用[J]. 工程数学学报, 2000, 17(2): 131-134.
ZHANG Qingzheng. Iterative Solution of Ordering Symmetric Contraction Operator Equations with Applications[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(2): 131-134. (in Chinese)

[3] 徐裕生, 孙俊萍. 一类混合单调算子方程解的存在唯一性定理[J]. 陕西师范大学学报, 2002, 30(3): 1-4.
XU Yusheng, SUN Junping. Existence and Uniqueness of Solutions for Systems of Some Mixed Monotone Operator Equations [J]. Journal of Shaanxi Normal University, 2002, 30(3): 1-4. (in Chinese)

[4] 孙经先, 刘立山. 非线性算子方程的迭代求解及其应用[J]. 数学物理学报, 1993, 13(3): 141-145.
SUN Jingxian, LIU Lishan. Fixed Points of Nonlinear Operator Equations and Applications[J]. Acta Mathematica Scientia, 1993, 13(3): 141-145. (in Chinese)

[5] 李俊强, 张斐然. 一类混合单调算子的新不动点定理的推广[J]. 郑州大学学报, 2004, 36(4): 13-15.
LI Junqiang, ZHANG Feiran. Generalizations of Fixed Point Theorems of Some Mixed Monotone Operators[J]. Journal of Zhengzhou University, 2004, 36(4): 13-15. (in Chinese)

[6] Dunford N, Schwarts J. Liner Operator(I)[M]. New York: [s. n.], 1958.

[7] Heinz H P. On the Behaviour of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector Valued Functions [J]. Nonlinear Anal, 1983, 7(12): 1351-1371.

[8] LIU Lishan. Iterative Method for Solutions and Coupled Quasi-solution of Nonlinear Fredholm Inteqral Equations in Ordered Banach Spaces[J]. Indian J pure Appl Math, 1996, 27(10): 956-972.

[9] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. New York: Academic Press Inc, 1988: 45-47.

[10] Taylor A E, LAY D C. Introduction to Functional Analysis[M]. New York: Spinger-Verlag, 1980: 277-281.

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版社, 1985.
GUO Dajun. Nonlinear Functional Analysis[M]. Jinan: Science and Technolgy Press, 1985. (in Chinese)

(编辑:田新华,徐楠楠)

Existence and Uniqueness of the Solutions of Some Non-linear Operator Equations in Banach Space

HAO Jian-li

(Department of math, Shangqiu Teachers College, Shangqiu 476000, China)

Abstract: Using the cone theory and non-symmetric iteration method, the existence and uniqueness of the solutions of a class of non-linear operator equations A (x,x) + uO = Bx without continuity and compactness conditions are studied. And the error estimates that the iterative sequences converge to solutions are also given. The results presented here are of the improvement and generalization of some corresponding results. Non-symmetric iteration method is another efficient method of solving the integral equation and the problem that cant be dealt with by using the symmetric iteration method in the semi-ordered space.

Key words: cone and partial ordering; operator equation; mixed monotone operator