

语言一致矩阵及其在决策中的应用

代 旻¹, 陈云翔¹, 李晓勇²

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 空军工程大学 科研部, 陕西 西安 710051)

摘 要:针对决策者思想中的不确定信息,引入语言变量,建立了重要性比较的语言标度集。给出了语言一致矩阵的定义,研究了语言一致矩阵的性质,如与人类思维的一致性和中分传递性等。在应用中,以语言标度构造语言一致矩阵,通过语言信息集结算子,对语言一致矩阵进行集结,得到决策结果。举例说明了语言一致矩阵的用法及其在决策中的正确性和有效性。

关键词:语言标度;语言一致矩阵;EOWA;语言量词

中图分类号: N945 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2007)06-0076-04

决策过程中构造判断矩阵,如互反判断矩阵、区间判断矩阵^[1]、模糊判断矩阵^[2]等,是一种常用的方法。人类语言与模糊数学有着密切的联系,用语言变量来表达人类头脑中的不确定性信息更符合人们的模糊思维习惯^[3-8]。本文以语言标度构造语言判断矩阵,基于语言一致矩阵给出了一种实用的决策方法,并与互反判断矩阵进行了比较,说明了语言一致矩阵的效果。

1 语言变量与语言标度

对于不精确和模糊环境的评价常常使用自然或人造语言,如评价一辆汽车的舒适性,可以用如“好”、“一般”、“差”等自然语言的词。使用的这种自然或人造语言的词或句子被称为语言变量^[3-4],文献[5]-[7]给出了语言变量的准确定义。在使用语言变量以前,要先选择一个合适的语言术语集,用它来表达模糊或不确定的信息。术语集的势决定了不确定信息的粒度,通常以奇数表示,最大不超过13^[8]。

定义 1 对于语言术语集 $S = \{s_i\}, i = \{0, 1, \dots, 2g\}, g \in \mathbf{N}$, 将语言变量的形式表示 s_i 定义为语言标度, 其运算规则为:

- 1) 如果 $i \geq j$, 那么 $s_i \geq s_j$;
- 2) 取负算子 $\text{neg}(s_i) = s_j, j = 2g - i$ 。

定义 2 定义扩展的语言术语集 $\bar{S} = \{s_i\}, i \in [0, 2g], g \in \mathbf{N}, \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$, 其运算规则为:

- 1) $s_i + s_j = s_j + s_i = s_{i+j}$;
- 2) $\gamma s_i = s_{\gamma i}$;
- 3) $\gamma(s_i + s_j) = \gamma s_i + \gamma s_j$;
- 4) $(\gamma_1 + \gamma_2) s_i = \gamma_1 s_i + \gamma_2 s_i$ 。

对扩展的语言术语集,原术语集的运算规则仍然适用。

2 语言一致矩阵及其性质

2.1 语言一致矩阵相关概念

收稿日期:2006-09-13

作者简介:代 旻(1981-),男,湖北荆州人,博士,主要从事装备系统工程与管理决策研究;
陈云翔(1962-),男,江苏南京人,教授,博士生导师,主要从事管理工程研究。

根据选取的语言标度,由专家给出准则或方案的重要性判断矩阵。设准则 C_k 下的决策准则或方案为 (D_1, D_2, \dots, D_n) , 在准则 C_k 下对准则或方案进行重要性的两两比较, 得到判断矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$ 。

设有语言术语集 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g, \dots, s_{2g}\}$ 。

定义3 设矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$, 若有 $d_{ij}^k \in S$, 则称矩阵 M^k 为语言判断矩阵。

定义4 设语言判断矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$, 若有 $d_{ij}^k + d_{ji}^k = s_{2g}$, 则称矩阵 M^k 是语言互补判断矩阵。

定义5 设语言互补判断矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$, 则其余矩阵定义为 $(M^k)^c = (d_{ij}^k)^c_{n \times n} = (d_{ij}^{kc})_{n \times n} = (s_{2g} - d_{ij}^k)_{n \times n}$ 。

定义6 设语言互补判断矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$, 若 $\forall r$, 均有 $(d_{ir}^k - s_g) + (d_{jr}^k - s_g) = d_{ij}^k - s_g$, 即 $d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g$, 则称 M^k 是语言一致矩阵。

2.2 语言一致矩阵的性质

定理1 语言一致矩阵符合人类决策思维的一致性。

证明: 如果 D_i 比 D_j 的重要程度大于 D_j 比 D_r 的重要程度, 则对人类思维来说应有 D_i 比 D_r 重要。从语言一致矩阵出发, 即若有 $d_{ir}^k > d_{jr}^k$, 则 $d_{ir}^k - d_{jr}^k > 0$, 即 $d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g > s_g$ 。由定义6, 有 $d_{ij}^k > s_g$ 。

同理可证 $d_{ir}^k < d_{jr}^k$ 。 $d_{ir}^k = d_{jr}^k$ 时语言一致矩阵都与人类思维一致。

定理2 语言一致矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$ 具有如下性质:

- 1) $d_{ii}^k = s_g$ 。
- 2) 第 i 行和第 i 列元素之和为 s_{2ng} 。
- 3) $(M^k)^T = (M^k)^c$, 且为语言一致矩阵。 $(M^k)^T$ 和 $(M^k)^c$ 分别是 M^k 的转置矩阵和语言余矩阵。
- 4) 从 M^k 中划去任意行及其对应列所得的降阶矩阵仍然是语言一致矩阵。
- 5) M^k 满足中分传递性, 即: ①当 $s_\alpha \geq s_g$ 时, 若 $d_{ir}^k \geq s_\alpha, d_{jr}^k \geq s_\alpha$, 则有 $d_{ij}^k \geq s_\alpha$; ②当 $s_\alpha \leq s_g$ 时, 若 $d_{ir}^k \leq s_\alpha, d_{jr}^k \leq s_\alpha$, 则有 $d_{ij}^k \leq s_\alpha$ 。

证明: 由前文的定义易证定理2性质1), 性质2), 性质3)。

证定理2性质4)。设删去了第 t 行和第 t 列, 新得的语言判断矩阵为 $(M^k)' = (d_{ij}^k)'_{(n-1) \times (n-1)}$ 其中

$$d_{ij}^k = \begin{cases} d_{ij}^k & i, j < t \\ d_{i, j+1}^k & i < t, j > t \\ d_{i+1, j}^k & i > t, j < t \\ d_{i+1, j+1}^k & i > t, j > t \end{cases}$$

当 $i, j < t$ 时, $d_{ij}^k = d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g$, 若 $r < t$, $d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g$; 若 $r > t$, $d_{ij}^k = d_{i, r-1}^k - d_{j, r-1}^k + s_g = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g, l = k - 1$ 。

同理可证: 当 $i, j > t$, 当 $i < t, j > t$ 及当 $i > t, j < t$ 时均有 $d_{ij}^k = d_{ii}^k - d_{jl}^k + s_g$, 故 $(d_{ij}^k)'$ 是语言一致矩阵。

定理2性质4)说明语言一致矩阵设计好后, 如果要删除某一因素, 不必重新设计语言一致矩阵, 只要从原矩阵中删除该因素对应的行与列即可。这样得到的降阶 $(n - 1)$ 阶语言判断矩阵仍然是语言一致矩阵。这说明语言一致矩阵有很好的鲁棒性。

定理2性质5)由定义6, $d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g$, ①当 $s_\alpha \geq s_g$ 时, $d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g = d_{ir}^k - (s_{2g} - d_{jr}^k) + s_g = d_{ir}^k + d_{jr}^k - s_g \geq s_g$, ②当 $s_\alpha \leq s_g$ 时, 若 $d_{ir}^k \leq s_\alpha, d_{jr}^k \leq s_\alpha$, 同理可证 $d_{ij}^k \leq s_\alpha$ 。

语言一致矩阵的中分传递性符合人们决策思维的心理。即有①当 $s_\alpha \geq s_g$ 时, 若 D_i 比 D_r 重要 ($d_{ir}^k \geq s_\alpha$), D_r 比 D_j 重要 ($d_{jr}^k \geq s_\alpha$), 则必有 D_i 比 D_j 重要 ($d_{ij}^k \geq s_\alpha$)。②当 $s_\alpha \leq s_g$ 时, 若 D_i 不比 D_r 重要 ($d_{ir}^k \leq s_\alpha$), D_r 不比 D_j 重要 ($d_{jr}^k \leq s_\alpha$), 则必有 D_i 不比 D_j 重要 ($d_{ij}^k \leq s_\alpha$)。

定理3 语言互补判断矩阵是语言一致矩阵的充要条件是任意指定两行对应元素之差为一个语言常量。

证明: 必要性。由定义6易证。

充分性。若 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$ 是语言互补判断矩阵, 且任意指定第 i 行和第 j 行设其元素之差为 $s_\alpha, \forall r = 1, 2, \dots, n$ 有

$$d_{ir}^k - d_{jr}^k = s_\alpha \tag{1}$$

成立。特别地,当 $r=j$ 时有

$$d_{ij}^k - d_{ji}^k = s_\alpha \tag{2}$$

成立,则由式(1)、式(2)有 $d_{ir}^k - d_{jr}^k = d_{ij}^k - d_{ji}^k, d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + d_{ji}^k$ 。由定义 4 知 $d_{ij}^k = s_g$, 故 $d_{ij}^k = d_{ir}^k - d_{jr}^k + s_g$ 。由定义 6 知语言互补判断矩阵 $M^k = (d_{ij}^k)_{n \times n}$ 是语言一致矩阵。

3 语言信息集结

给出语言互补判断矩阵后,需要对互补判断矩阵的决策信息进行集结,得到准则或方案的重要性评价。基于 Yager^[9] 的 OWA 算子和扩展的语言术语集,徐泽水提出了一种基于语言值的 EOWA 算子^[10]。

定义 7 设 $EOWA: \bar{S}^n \rightarrow \bar{S}$, 若 $EOWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = w_1 s_{\beta_1} \oplus w_2 s_{\beta_2} \oplus \dots \oplus w_n s_{\beta_n}$, 其中 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 是与 EOWA 相关联的加权向量, $w_j \in [0, 1]$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 。 s_{β_j} 是一组语言数据 $(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n})$ 中第 j 大的元素, 称函数 EOWA 是扩展的有序加权平均(EOWA)算子。

引入语言量词(linguistic quantifier)来获得与 EOWA 算子相关联的权重。语言量词由 Zadeh^[3] 在 1983 年提出。典型的语言量词有“最多”, “至少一半”, “全部”, “尽可能多”等。Zadeh 认为语言量词有两类: 一种是绝对的, 它表示数量信息; 第二种是相对的, 它表示比例信息。

对一个绝对语言量词: $Q(0) = 0, \exists k$, 使得 $Q(k) = 1$; 对一个相对语言量词: $Q: [0, 1] \rightarrow [0, 1], Q(0) = 0, \exists r \in [0, 1]$, 使得 $Q(r) = 1$ 。相对语言量词的成员函数可以被表示为: $Q(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ 1 & r > b \end{cases}$ 。 $a, b, r \in [0, 1]$ 。

对于“最多”、“至少一半”、“尽可能多”等相对语言量词, 其语言变量的参数 (a, b) 分别是 $(0.3, 0.8), (0, 0.5), (0.5, 1)$ 。

通过语言量词的成员函数 $Q(r)$, 可以计算出 EOWA 算子集结时的权重 W : 对于绝对语言量词, $w_i = Q(i) - Q(i-1), i = 1, 2, \dots, m$, 对于相对语言量词, $w_i = Q(i/m) - Q((i-1)/m), i = 1, 2, \dots, m$ 。

4 应用实例

1) 设对于某准则 C_k 下的准则或方案 (D_1, D_2, D_3, D_4) , 选取的语言标度 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_8\}$, s_4 表示 D_i 与 D_j 同等重要, s_8 表示 D_i 比 D_j 绝对重要, 依次类推。决策者给出的语言判断矩阵 M^k 如表 1 所示。

选取语言量词“大多数”, 得到权重 $W = (0, 0.4, 0.5, 0.1)$, 通过 EOWA 算子对 (D_1, D_2, D_3, D_4) 进行重要性集结, $d_1 = s_{0.8+0.4 \times 6+0.5 \times 5+0.1 \times 4} = s_{5.3}, d_2 = s_{0.4+0.4 \times 3+0.5 \times 2+0.1 \times 0} = s_{2.2}, d_3 = s_{0.6+0.4 \times 4+0.5 \times 4+0.1 \times 3} = s_{3.9}, d_4 = s_{0.5+0.4 \times 4+0.5 \times 4+0.1 \times 2} = s_{3.8}$ 由语言变量的比较可知其排序为 $D_1 > D_3 > D_4 > D_2$ 。

2) 使用 1-9 标度构造的判断矩阵如表 2 所示。

通过特征向量法解出 $\lambda_{\max} = 4.0656, W = (0.9186, 0.0791, 0.3062, 0.2372), CI = 0.0219, CR = 0.0243 < 0.1$ 。因此, 通过数值判断矩阵得到的排序为 $D_1 > D_3 > D_4 > D_2$, 与语言判断矩阵得到的排序完全相同。

表 1 语言判断矩阵

C_k	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	s_4	s_8	s_5	s_6
D_2	s_0	s_4	s_2	s_3
D_3	s_3	s_6	s_4	s_4
D_4	s_2	s_5	s_4	s_4

表 2 互反判断矩阵

C_k	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	1	9	3	5
D_2	1/9	1	1/5	1/3
D_3	1/3	5	1	1
D_4	1/5	3	1	1

5 结论

本文定义了语言判断矩阵,语言互补判断矩阵和语言一致矩阵等概念。讨论了语言一致矩阵的性质。说明了语言一致矩阵符合人类决策思维的心理。给出了语言一致矩阵在决策分析中的用法及实例,并通过与数值判断矩阵的比较说明了其实用性和有效性。由于语言判断矩阵在构造时更加符合人类的思维形式,且通过信息集结算子使排序更加方便,因此它在应用中相对于其它形式的判断矩阵具有独特的优势。

参考文献:

- [1] 徐泽水. 综合判断矩阵的一致性及特征值问题研究[J]. 系统工程学报, 2000, 15(3): 258 - 261.
- [2] 张吉军. 模糊层次分析法(FAHP)[J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(2): 80 - 88.
- [3] Herrera F, Herrera - Viedma E. Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information [J]. IEEE Transactions on systems, man and cybernetics, Part A: systems, 1997, 27(5): 646 - 656.
- [4] Herrera F, Martinez L. A_2 - tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746 - 752.
- [5] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning(I) [J]. Information sciences, 1974, 8(2): 199 - 249.
- [6] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning(II) [J]. Information sciences, 1974, 8(3): 301 - 357.
- [7] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning(III) [J]. Information sciences, 1975, 9(1): 43 - 80.
- [8] Herrera F, Herrera - Viedma E, Martinez L. A Fusion Approach for Managing Multi - Granularity Linguistic Term Sets in Decision Making [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 43 - 58.
- [9] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 183 - 190.
- [10] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

(编辑: 姚树峰)

Linguistic Consistent Matrix and Its Application in Decision Making

DAI Min¹, CHEN Yun - xiang¹, LI Xiao - yong²

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 2. Science Research Department, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: To deal with the uncertain information in decision maker's mind, linguistic variables are introduced, the linguistic label set for importance comparison is built. The linguistic consistent matrix is defined, and its properties, such as the consistency with human's thinking and center - division transitivity, are studied. By using linguistic aggregation operator, the information of linguistic consistent matrix is aggregated and a result is gained. An example is presented to explain the usage and show the efficiency and correctness of the linguistic consistent matrix in decision - making.

Key words: linguistic label; linguistic consistent matrix; EOWA; linguistic quantifier