# Larsen 模糊推理算法的直觉化扩展

雷英杰[1]， 王　坚[1]， 杜蓬勃[2]
(1. 空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800；2. 空军工程大学 训练部，陕西 西安　710051)

**摘　要**：对 Larsen 模糊推理算法进行了直觉化扩展。首先将 Larsen 定义的模糊关系 $R_p$ 进行直觉化扩展，然后推出了其对应的直觉模糊取式推理算法和直觉模糊拒式推理算法。最后以具体算例叙述了推理计算过程中的细节，验证了该方法的正确性和有效性。结果证明直觉化扩展后的 Larsen 模糊推理算法是一种性能比较好的直觉模糊推理算法。

**关键词**：模糊集合；直觉模糊；逻辑推理
**中图分类号**：TP182　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2007)05-0078-03

直觉模糊集合(Intuitionistic Fuzzy Sets，IFS)是对 Zadeh 模糊集合[1]的一种扩充和发展。IFS 最初由保加利亚学者 Atanassov 于 1986 年提出[1-3]。他系统提出并定义了直觉模糊集及其一系列运算和定理，研究了直觉模糊集与 L-模糊集、区间值模糊集相结合，从而形成 L-直觉模糊集、区间值直觉模糊集等；提出了直觉模糊逻辑命题及“与”、“或”算子等概念，发展了直觉模糊逻辑。同时，许多学者对此开展研究。李晓萍等研究了直觉模糊群与它的同态像[4]。雷英杰等研究了直觉模糊逻辑语义算子[5]、直觉模糊关系运算[6]、时态逻辑算子及扩展运算的若干性质[7-10]等。本文对 Larsen 模糊推理算法进行了直觉化扩展。

## 1　Larsen 模糊推理算法的直觉化扩展

Larsen 提出了采用乘积运算作为模糊蕴涵的规则来构造模糊关系，记为 $R_p$。令 $A,B$ 分别是 $X,Y$ 中的模糊集合：

$$A=\int_X \mu_A(x)/x\ ,B=\int_Y \mu_B(y)/y$$

$x\in X,y\in Y$。×、∪、∩、－、⊕ 分别表示模糊集合的笛卡尔积、并、交、补和有界和。同“若 $x$ 是 $A$ 则 $y$ 是 $B$”的推理句，Larsen 定义的 $X\times Y$ 的模糊关系 $R_p$ 定义为

$$R_p=A\times B==\int_{X\times Y}\mu_A(x)\mu_B(y)/(x,y) \tag{1}$$

对于肯定前件式，采用“∧-∨”合成规则的 Larsen 模糊逻辑推理基本形式算法为

$$B'_p=A'^{\circ}R_p=A'^{\circ}(A\times B)=\int_{Y}\bigvee_{x\in X}((\mu_{A'}(x)\ \wedge\ (\mu_A(x)\mu_B(y)))/y \tag{2}$$

对于肯定后件式，采用“∧-∨”合成规则的 Larsen 模糊逻辑推理基本形式算法为

$$A'_p=R_p{}^{\circ}B'=(A\times B)^{\circ}B'=\int_{X}\bigvee_{y\in Y}(\mu_A(x)(\mu_B(y))\ \wedge\ \mu_{B'}(y))/x \tag{3}$$

根据式(1)、(2)、(3)，将 Larsen 定义的模糊关系 $R_p$ 进行直觉化扩展，有

$$R_p=A\times B=\int_{X\times Y}<\mu_{R_p}(x,y),\gamma_{R_p}(x,y)>/(x,y) \tag{4}$$

式中

**收稿日期**：2007-01-26
**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(60773209)；陕西省自然科学基金资助项目(2006F18)
**作者简介**：雷英杰(1956-)，男，陕西渭南人，教授，博士生导师，主要从事智能信息处理与军用软件工程等研究．

$$\mu_{R_p}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y) \quad (5a) \qquad \gamma_{R_p}(x,y)=\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y) \quad (5b)$$

或

$$\mu_{R_p}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y) \quad (6a) \qquad \gamma_{R_p}(x,y)=\gamma_A(x)\oplus\gamma_B(y) \quad (6b)$$

或

$$\mu_{R_p}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y) \quad (7a) \qquad \gamma_{R_p}(x,y)=\gamma_A(x)\overset{\wedge}{+}\gamma_B(y) \quad (7b)$$

根据式(4)、(5)、(6)和(7)，运用直觉模糊关系 $R_p$ 时，对应的直觉模糊取式推理算法为

$$B_p^*=B'=A'\circ R_p \tag{8}$$

即

$$\mu_{B_p^*}(y)=\overset{\vee}{x\in X}(\mu_{A'}(x)\wedge(\mu_A(x)\mu_B(y))) \quad (9a) \qquad \gamma_{B_p^*}(y)=\overset{\wedge}{x\in Y}(\gamma_{A'}(x)\vee(\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y))) \quad (9b)$$

或

$$\mu_{B_p^*}(y)=\overset{\vee}{x\in X}(\mu_{A'}(x)\wedge(\mu_A(x)\mu_B(y))) \quad (10a) \qquad \gamma_{B_p^*}(y)=\overset{\wedge}{x\in X}(\gamma_{A'}(x)\vee(1\wedge(\gamma_A(x)+\gamma_B(y)))) \quad (10b)$$

或

$$\mu_{B_p^*}(y)=\overset{\vee}{x\in X}(\mu_{A'}(x)\wedge(\mu_A(x)\mu_B(y))) \quad (11a) \qquad \gamma_{B_p^*}(y)=\overset{\wedge}{x\in X}(\gamma_{A'}(x)\vee(\gamma_A(x)+\gamma_B(y)-\gamma_A(x)\gamma_B(y))) \quad (11b)$$

式(8)、(9)、(10)、(11)为运用直觉模糊关系 $R_p$ 的直觉模糊取式推理算法。

根据式(4)、(5)、(6)、(7)，运用直觉模糊关系 $R_p$ 时，对应的直觉模糊拒式推理算法为

$$A_p^*=A'=R_p\circ B' \tag{12}$$

$$\mu_{A_p^*}(x)=\overset{\vee}{y\in Y}((\mu_A(x)(\mu_B(y))\wedge\mu_{B'}(y)) \quad (13a) \qquad \gamma_{A_p^*}(x)=\overset{\vee}{y\in Y}((\gamma_A(x)\vee\gamma_B(y))\vee\gamma_{B'}(y)) \quad (13b)$$

或

$$\mu_{A_p^*}(x)=\overset{\vee}{y\in Y}(\mu_{A'}(x)\wedge(\mu_A(x)\mu_B(y))) \quad (14a) \qquad \gamma_{A_p^*}(x)=\overset{\vee}{y\in Y}((1\wedge(\gamma_A(x)+\gamma_B(y))\vee\gamma_{A'}(y)) \quad (14b)$$

或

$$\mu_{A_p^*}(x)=\overset{\vee}{y\in Y}(\mu_{A'}(x)\wedge(\mu_A(x)\mu_B(y))) \quad (15a) \qquad \gamma_{A_p^*}(x)=\overset{\wedge}{y\in Y}((\gamma_A(x)+\gamma_B(y)-\gamma_A(y)-\gamma_B(y))\vee\gamma_{A'}(x)) \quad (15b)$$

式(12)、(13)、(14)、(15)为运用直觉模糊关系 $R_p$ 的直觉模糊拒式推理算法。

## 2 算例研究

下面以实际算例进一步说明和验证真值限定的直觉模糊推理方法的推理计算过程。

**例** 已知 $A$, $A'\in \mathrm{IFS}(X)$, $B\in\mathrm{IFS}(Y)$, $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$。已知规则：若 $x$ 是 $A$ 则 $y$ 是 $B$，求若 $x$ 是 $A'$，$y$ 是 $B$的结果和 $y$ 是 $B'$，$x$ 是 $A$的结果？假定

$A=\langle 1,0\rangle/x_1+\langle 0.5,0.4\rangle/x_2+\langle 0.33,0.6\rangle/x_3+\langle 0.25,0.65\rangle/x_4+\langle 0.2,0.7\rangle/x_5$

$B=\langle 0.2,0.7\rangle/y_1+\langle 0.4,0.9\rangle/y_2+\langle 0.6,0.3\rangle/y_3+\langle 0.8,0.1\rangle/y_4+\langle 1,0\rangle/y_5$

**解** 根据直觉模糊关系 $R_p$ 的定义，由 $A$、$B$ 的直觉模糊集可以得到各种直觉模糊关系的直觉模糊矩阵。这里选取式(4)、(5)、(8)、(9)、(12)(13)的直觉模糊推理算法，$\boldsymbol{R}_p$ 的直觉模糊矩阵为

$$\boldsymbol{R}_p=\begin{bmatrix}\langle 0.2,0.7\rangle & \langle 0.4,0.5\rangle & \langle 0.6,0.3\rangle & \langle 0.8,0.1\rangle & \langle 1,0\rangle \\ \langle 0.1,0.7\rangle & \langle 0.2,0.5\rangle & \langle 0.3,0.4\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.5,0.4\rangle \\ \langle 0.07,0.7\rangle & \langle 0.13,0.6\rangle & \langle 0.2,0.6\rangle & \langle 0.26,0.6\rangle & \langle 0.33,0.6\rangle \\ \langle 0.05,0.7\rangle & \langle 0.1,0.65\rangle & \langle 0.15,0.65\rangle & \langle 0.2,0.65\rangle & \langle 0.25,0.65\rangle \\ \langle 0.04,0.7\rangle & \langle 0.08,0.7\rangle & \langle 0.12,0.7\rangle & \langle 0.16,0.7\rangle & \langle 0.2,0.7\rangle\end{bmatrix}$$

当 $A'=A$ 时：

$B'=A'\circ R_p=[\langle 1,0\rangle\langle 0.5,0.4\rangle\langle 0.33,0.6\rangle\langle 0.25,0.65\rangle\langle 0.2,0.7\rangle]\circ R_p=\{\langle 0.2,0.7\rangle\langle 0.4,0.5\rangle\langle 0.6,0.3\rangle\langle 0.8,0.1\rangle\langle 1,0\rangle\}$

即：

$B'=\langle 0.2,0.7\rangle/y_1+\langle 0.4,0.9\rangle/y_2+\langle 0.6,0.3\rangle/y_3+\langle 0.8,0.1\rangle/y_4+\langle 1,0\rangle/y_5=B$

当 $B'=B$ 时:

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{R}_p\circ\boldsymbol{B}'=$$

$$\begin{bmatrix} \langle 0.2,0.7\rangle & \langle 0.4,0.5\rangle & \langle 0.6,0.3\rangle & \langle 0.8,0.1\rangle & \langle 1,0\rangle \\ \langle 0.1,0.7\rangle & \langle 0.2,0.5\rangle & \langle 0.3,0.4\rangle & \langle 0.4,0.4\rangle & \langle 0.5,0.4\rangle \\ \langle 0.07,0.7\rangle & \langle 0.13,0.6\rangle & \langle 0.2,0.6\rangle & \langle 0.26,0.6\rangle & \langle 0.33,0.6\rangle \\ \langle 0.05,0.7\rangle & \langle 0.1,0.65\rangle & \langle 0.15,0.65\rangle & \langle 0.2,0.65\rangle & \langle 0.25,0.65\rangle \\ \langle 0.04,0.7\rangle & \langle 0.08,0.7\rangle & \langle 0.12,0.7\rangle & \langle 0.16,0.7\rangle & \langle 0.2,0.7\rangle \end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} \langle 0.2,0.7\rangle \\ \langle 0.4,0.9\rangle \\ \langle 0.6,0.3\rangle \\ \langle 0.8,0.1\rangle \\ \langle 1,0\rangle \end{bmatrix}=$$

$$\{\langle 1,0\rangle\langle 0.5,0.4\rangle\langle 0.33,0.6\rangle\langle 0.25,0.65\rangle\langle 0.2,0.7\rangle\}$$

即:

$$\boldsymbol{A}'=\langle 1,0\rangle/y_1+\langle 0.5,0.4\rangle/y_2+\langle 0.33,0.6\rangle/y_3+\langle 0.25,0.65\rangle/y_4+\langle 0.2,0.7\rangle/y_5=A$$

可以看出,无论是对于直觉模糊取式推理还是对于直觉模糊拒式推理,当 $A'=A$ 或者 $B'=B$ 时,$R_p$ 都是性能比较好的直觉模糊关系。

## 3 结论

本文的主要贡献是将 Larsen 模糊推理算法进行了直觉化扩展。首先将 Larsen 定义的模糊关系 $\boldsymbol{R}_p$ 进行直觉化扩展,然后推出了对应的直觉模糊取式推理算法和直觉模糊拒式推理算法。最后以具体算例验证了该方法的正确性和有效性,表明了推理计算过程的详细步骤。算例结果分析表明,无论是对于直觉模糊取式推理还是对于直觉模糊拒式推理,当 $A'=A$ 或者 $B'=B$ 时,$\boldsymbol{R}_p$ 都是性能比较好的直觉模糊关系。

**参考文献:**


[1] Atanassov K. More on Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33 (1) : 37 -46.

[2] Atanassov K. New Operations Defined Over the Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61 (2) : 137 - 142.

[3] Atanassov K, Kacprzyk Janusz, Szmidt Eulalia, et al. On Separability of Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2003, 2715 : 285 -292.

[4] 雷英杰, 王宝树. 直觉模糊关系及其合成运算 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(2) : 113 - 118.

[5] 雷英杰, 王宝树. 直觉模糊逻辑的语义算子研究 [J]. 计算机科学, 2004, 31 (11) : 4 - 6.

[6] 李晓萍, 王贵君. 直觉模糊集的扩张运算 [J]. 模糊系统与数学, 2003, 16 (1) : 40 - 46.

[7] 雷英杰, 王宝树, 路艳丽. 基于直觉模糊逻辑的近似推理方法 [J]. 控制与决策, 2006, 21(3):305 - 310.

[8] 雷英杰, 王宝树. 直觉模糊集时态逻辑算子及扩展运算性质 [J]. 计算机科学, 2005, 32(2) : 180 - 182.

[9] 雷英杰, 王 涛, 赵 晔. 直觉模糊匹配的语义距离与贴近度[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2005, 6(1) :69 - 72.

[10] 雷英杰, 赵 晔, 王 涛. 直觉模糊匹配的相似性度量[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2005, 6(2) :83 - 86.


(编辑:田新华)

## Intuitional Extension of Larsen Fuzzy Reasoning Algorithm


LEI Ying - jie, WANG Jian, DU Peng - bo

(1. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China; 2. Training Department, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)



**Abstract**: Larsen fuzzy reasoning algorithm is intuitively extended in this paper. Firstly, the fuzzy relation (FR) of Rp that is defined by Larsen is intuitively extended. Secondly, the intuitional fuzzy generalized modus ponens formulas and intuitional fuzzy generalized modus tollens formulas of IFR Rp are deduced. Finally, an instance is given to depict the detail of logic reasoning and computing, which verifies the validity of this method. The result shows that the intuitively extended Larsen FR algorithm is a better IFR algorithm.



**Key words**: fuzzy sets; intuitional fuzzy; logic reasoning