直觉模糊集的扩展研究

李晓漫[1,2]， 田 野[1]， 雷英杰[1]
(1. 空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800;2. 空军93861部队，陕西 三原 713800)

摘 要:基于直觉模糊集的基本概念,考虑其隶属度、非隶属度和概率分布3个因素的影响,给出了直觉模糊集两种扩充:统计直觉模糊集和多值直觉模糊集,并给出了扩充直觉模糊集的运算和包含关系,从而使直觉模糊得到了推广和应用。

关键词:直觉模糊集;统计直觉模糊集;多值直觉模糊集;隶属度;非隶属度

中图分类号: TP182 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2007)04-0092-03

1993年,Gau等人提出了Vague集[1],它是一种模糊信息处理理论,在Vague集中,论域内的元素与论域上的集合之间的关系是“在一定程度范围之内属于”的关系,它的隶属度采用区间的表示形式,这个区间既给出了支持证据的程度,同时也给出了反对证据的程度,而且能够表示并处理Fuzzy集无法表示和处理的模糊信息。Atanassov于1986年提出直觉模糊集[2]。1996年Bustince等[3]证明了Vague集与直觉模糊集在定义上是等同的、本质上是一致的,只是采用了不同的表示方式。

Vague集是Fuzzy集的推广,Fuzzy集可以看作Vague集的特例[4],两者在一定程度上可以相互转化,如Burillo等[5]给出了由两个Fuzzy集构建一个Vague集的方法;Bustince等[6]给出了Vague集向Fuzzy集转化的方法,在此基础上,本文给出了直觉模糊集的两种扩充:统计直觉模糊集和多值直觉模糊集。

1 直觉模糊集

直觉模糊集是对经典模糊集的扩充,增加了一个新的属性参数:非隶属度函数,能够更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质,因而引起众多学者的研究和关注。

直觉模糊集:设X是一个给定论域,则X上的一个直觉模糊集A为

$$A=\{<x,\mu_A(x),\gamma_A(x)>|x\in X\} \tag{1}$$

其中,$\mu_A(x):X\to[0,1]$和$\gamma_A(x):X\to[0,1]$分别代表A的隶属函数和非隶属函数,且对于A上的所有$x\in X$,$0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant 1$ 成立。

当X为连续空间时,$A=\int_A <x,\mu_A(x),\gamma_A(x)>/x,x\in X$;当$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为离散空间时,$A=\sum_{i=1}^{n}<\mu_A(x_i),\gamma_A(x_i)>/x_i,x_i\in X,i=1,2,\cdots,n$。直觉模糊集$A$有时可以简记作$A=<x,\mu_A,\gamma_A>$或者$A=<\mu_A,\gamma_A>/x$。

对于X中的每一个直觉模糊子集,我们称$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$为$A$中$x$的直觉指数,它是$x$对$A$的犹豫程度的一种测度。

2 统计直觉模糊集

统计直觉模糊集是对直觉模糊集的一种扩充,增加了一个新的属性参数:论域的概率分布,能够更加确

收稿日期:2006-11-02
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2006F18)
作者简介:李晓漫(1972-),女,陕西咸阳人,硕士生,主要从事智能决策理论研究;
雷英杰(1956-),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要从事智能决策理论研究.

切地描述和刻画客观世界的模糊性本质,具有研究和应用的价值。

统计直觉模糊集:设 X 是一个给定论域,则 X 上的一个统计直觉模糊集 A 为

$$A = \{ < x,\mu_A(x),\gamma_A(x),p_A(x) > | x \in X\} \tag{2}$$

其中,$\mu_A(x):X\to[0,1]$ 和 $\gamma_A(x):X\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数 $\mu_A(x)$ 和非隶属函数 $\gamma_A(x)$,且对于 A 上的所有 $x \in X$,$0 \leqslant \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leqslant 1$ 成立, $p(x)$ 为 x 发生的概率。

当 X 为连续空间时,记 X 的概率密度函数为 $f(x)$,则 $A = \int_A < \mu_A(x),\gamma_A(x),f_A(x) > /x,x \in X$;当 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为离散空间时,记 X 的概率分布率为 $P = \{p(x_1),p(x_2),\cdots,p(x_n)\}$,则 $A = \sum_{i=1}^{n} < \mu_A(x_i),\gamma_A(x_i),p_A(x_i) > /x_i,x_i \in X,i = 1,2,\cdots,n$;统计直觉模糊集 A 有时可以简记作 $A = < x,\mu_A,\gamma_A,f_A >$ 或者 $A = < \mu_A,\gamma_A,f_A > /x$ 。

设 A 和 B 为论域 X 上的两个统计直觉模糊集,定义 A 和 B 上的并、交、补运算以及 A 和 B 之间包含关系[7-9] 如下:

$$A \cup B = \sum_{i=1}^{n} < \mu_{A\cup B}(x_i),\gamma_{A\cup B}(x_i),p_{A\cup B}(x_i)/x_i,x_i \in X,i = 1,2,\cdots,n > \tag{3}$$

其中:$\mu_{A\cup B}(x_i) = \max[p_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i),p_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i)]$; $\gamma_{A\cup B}(x_i) = \min[p_A(x_i) \cdot \gamma_A(x_i),p_B(x_i) \cdot \gamma_B(x_i)]$;$p_{A\cup B}(x_i) = \max[p_A(x_i),p_B(x_i)]$。

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} < \mu_{A\cap B}(x_i),\gamma_{A\cap B}(x_i),p_{A\cap B}(x_i)/x_i,x_i \in X,i = 1,2,\cdots,n > \tag{4}$$

其中:$\mu_{A\cap B}(x_i) = \min[p_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i),p_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i)]$; $\gamma_{A\cap B}(x_i) = \max[p_A(x_i) \cdot \gamma_A(x_i),p_B(x_i) \cdot \gamma_B(x_i)]$;$p_{A\cap B}(x_i) = \min[p_A(x_i),p_B(x_i)]$。

$$A^c = \sum_{i=1}^{n} < \gamma_A(x_i),\mu_A(x_i),p_A(x_i)/x_i,x_i \in X,i = 1,2,\cdots,n > \tag{5}$$

$$A \leqslant B \Leftrightarrow p_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i) \leqslant p_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i) \text{ 且 } p_B(x_i) \cdot \gamma_B(x_i) \leqslant p_B(x_i) \cdot \gamma_B(x_i), \forall x_i \in X \tag{6}$$

$$A = B \Leftrightarrow p_A(x_i) \cdot \mu_A(x_i) = p_B(x_i) \cdot \mu_B(x_i) \text{ 且 } p_B(x_i) \cdot \gamma_B(x_i) = p_B(x_i) \cdot \gamma_B(x_i), \forall x_i \in X \tag{7}$$

3　多值直觉模糊集

在实际中,对一个对象的评价,不同的人得到的结果往往是不同的,即使同一人从不同角度出发得到的结果往往也是不同的。例如,不同的评委对一个参赛歌手打分一般是不同的;同一种武器系统的威胁程度,对于作战方和防御方来说是不同的。由此启发我们引入多值直觉模糊集的概念。

多值直觉模糊集:设 X 是一个给定论域,则 X 上的一个多值直觉模糊集 A 为

$$A = \{ < x,[\mu_1^A(x),\mu_2^A(x),\cdots,\mu_n^A(x)],[\gamma_1^A(x),\gamma_2^A(x),\cdots,\gamma_n^A(x)] > | x \in X\} \tag{8}$$

其中,$\mu_k^A(x):X\to[0,1]$ 和 $\gamma_k^A(x):X\to[0,1]$ 分别代表 A 的第 k 个隶属函数和非隶属函数,且对于 A 上的所有 $x \in X,0 \leqslant \mu_k^A(x) + \gamma_k^A(x) \leqslant 1$ ($k = 1,2,\cdots,n$) 成立。

当 X 为连续空间时,多值直觉模糊集 A 可表示为

$$A = \int_A < [\mu_1^A(x),\mu_2^A(x),\cdots,\mu_n^A(x)],[\gamma_1^A(x),\gamma_2^A(x),\cdots,\gamma_n^A(x)] > /x,x \in X。$$

当 X 为离散空间时 $X = \{x_1,x_2,\cdots,x_M\}$,多值直觉模糊集 A 可表示为:

$$A = \sum_{i=1}^{n} < [\mu_1^A(x_i),\mu_2^A(x_i),\cdots,\mu_n^A(x_i)],[\gamma_1^A(x_i),\gamma_2^A(x_i),\cdots,\gamma_n^A(x_i)] > /x_i,x_i \in X,i = 1,2,\cdots,M。$$

多值直觉模糊集 A 有时可以简记作 $A = < x,\boldsymbol{\mu}^A,\boldsymbol{\gamma}^A >$ 或者 $A = < x,\boldsymbol{\mu}^A,\boldsymbol{\gamma}^A > /x$,其中, $\boldsymbol{\mu}^A,\boldsymbol{\gamma}^A$ 看作 n 维向量。

设 A 和 B 为论域 X 上的两个多值直觉模糊集,定义 A 和 B 上的交、并、补运算以及 A 和 B 之间的包含关系[7-9] 如下:

$$A \cup B = \sum_{i=1}^{n} < [\mu_1^{A\cup B}(x_i),\mu_2^{A\cup B}(x_i),\cdots,\mu_n^{A\cup B}(x_i)],[\gamma_1^{A\cup B}(x_i),\gamma_2^{A\cup B}(x_i),\cdots,\gamma_n^{A\cup B}(x_i)] > /x_i,x_i \in X \tag{9}$$

其中:$\mu_j^{A\cup B}(x_i) = \max[\mu_j^A(x_i), \mu_j^A(x_i)]$; $\gamma_j^{A\cup B}(x_i) = \min[\gamma_j^A(x_i), \gamma_j^A(x_i)]$; $j = 1,2,\cdots,n$。

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} < [\mu_1^{A\cap B}(x_i), \mu_2^{A\cap B}(x_i), \cdots, \mu_n^{A\cap B}(x_i)], [\gamma_1^{A\cap B}(x_i), \gamma_2^{A\cap B}(x_i), \cdots, \gamma_n^{A\cap B}(x_i)] > /x_i, x_i \in X \tag{10}$$

其中:$\mu_j^{A\cap B}(x_i) = \max[\mu_j^A(x_i), \mu_j^A(x_i)]$; $\gamma_j^{A\cap B}(x_i) = \min[\gamma_j^A(x_i), \gamma_j^A(x_i)]$; $j = 1,2,\cdots,n$。

$$A^c = \sum_{i=1}^{n} < [\gamma_1^A(x_i), \gamma_2^A(x_i), \cdots, \gamma_n^A(x_i)], [\mu_1^A(x_i), \mu_2^A(x_i), \cdots, \mu_n^A(x_i)], > /x_i, x_i \in X, i = 1,2,\cdots,M \tag{11}$$

$$A \leqslant B \Leftrightarrow \mu_j^A(x_i) \leqslant \mu_j^B(x_i) \text{ 且 } \gamma_j^A(x_i) \leqslant \gamma_j^B(x_i), \forall x_i \in X, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{12}$$

$$A = B \Leftrightarrow \mu_j^A(x_i) = \mu_j^B(x_i) \text{ 且 } \gamma_j^A(x_i) = \gamma_j^B(x_i), \forall x_i \in X, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{13}$$

直觉模糊集的很多理论[7-10]都可以应用到统计直觉模糊集和多值直觉模糊集。

4 结束语

为了形成统一的模糊集理论,近年来有的学者提出“统一集”的概念,统一集不仅能够对现有的理论进行总结、统一,而且还为开辟崭新的集合论、逻辑推理方法提供很好的理论基础。本文只是针对实际问题中经常遇到的现象,给出了统计直觉模糊集和多值直觉模糊集的概念及其他们的运算和包含规则,是对直觉模糊集理论的一种扩充。这种扩充有助于描述并解决实际问题。

参考文献:

[1] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 1993, 23(2):610 - 614.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets - Fuzzy Sets and Systems[J]. 1986, 20:87 - 96.

[3] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1996. 79:403 - 405.

[4] Szmidt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118(3):467 - 477.

[5] Burillo P, Bustince H. Construction theorems for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 84(3):271 - 281.

[6] Bustince H, Burillo P. Structures on intuitionistic fuzzy relations[J]. Fuzzy Sets and Systems. 1996. 78(3):293 - 303.

[7] 雷英杰,王 涛,赵 晔. 直觉模糊匹配的语义距离与贴近度[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2005, 6(1):69 - 72.

[8] 雷英杰,王宝树. 直觉模糊逻辑的语义算子研究[J]. 计算机科学, 2004, 31 (11):4 - 6.

[9] 雷英杰,孙金萍,王宝树. 模糊知识处理与模糊集理论的若干拓展[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2004, 5(3):40 - 44.

[10] 张 江,林 华,贺仲雄. 统一集论与人工智能[J]. 中国工程科学, 2002, 4 (3):40 - 47.

(编辑:田新华)

Extension of Intuitionistic Fuzzy Sets

LI Xiao - man[1,2], TIAN Ye[1], LEI Ying - jie[1]

(1. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. Air Force Unit 93861, Sanyuan, Shaanxi 710038)

Abstract: Based on the fundamental notions of intuitionistic fuzzy sets, and in consideration of the effects of the three factors - the membership, the non - membership and the probability distribution, two extensions of intuitionistic fuzzy sets, i. e. statistical intuitionistic fuzzy sets and multi - value intuitionistic fuzzy sets, are presented. The calculations and relations of extending the intuitionistic fuzzy sets are introduced. Thus, the intuitionistic fuzzy sets are further extended and applied.

Key words: intuitionistic fuzzy sets; statistical intuitionistic fuzzy sets; multi - value intuitionistic fuzzy sets; non - membership