第 8 卷第 3 期　　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　　Vol. 8 No. 3
2007 年 6 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Jun. 2007

属性权重信息不完全区间数多属性决策方法

解　瑶，　毛晓楠，　张蓓蓓
(空军指挥学院，北京 100089)

摘　要:依据传统的 TOPSIS 方法的基本思路,基于相对隶属度法,给出了解决属性权重信息不完全的区间数多属性决策问题的计算步骤。其核心是借助每一方案的综合加权距离求得每个方案相对于优等方案的隶属度,再按隶属度的大小进行决策。该方法克服了以往研究此类问题时所遇到的区间数难以排序的困难,表明相对隶属度法的择优与排序能力要比传统的逼近理想解法强。最后,用实例说明了模型的可行性和有效性。

关键词:多属性决策;相对隶属度法;区间数
中图分类号: O934　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2007)03-0087-04

多属性决策理论与方法目前已成为决策科学、系统工程、管理与运筹等领域研究的热点。实际问题中,决策信息(多指标权重和决策矩阵)由于估计不精确或测量的误差常常带有不确定性,导致信息的量化多数以区间的形式出现。如果决策信息(一般指属性权重和属性值)是精确或确定数值的,那么已有许多成熟的技术与分析方法。但在许多实际的多属性决策问题中,经常会遇到属性权重信息不完全且属性值确定或者属性权重信息和属性值信息都不完全的情形,而针对这类具有不完全信息的多属性决策问题的研究已经引起了有关学者的重视,文献[1]给出了属性权重信息不完全的区间数多属性决策方法,本文则是依据传统 TOPSIS 方法的基本思路,利用相对隶属度,对其进行了改进。

1　区间数多属性决策问题的描述

设区间多指标决策问题的决策方案集为 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$,其中 S_i 表示第 i 个方案;指标集为 $Q=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$,其中 Q_j表示第 j 个指标。记以区间数形式表示的决策矩阵为 $\tilde{A}=[\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$,其中 $\tilde{a}_{ij}=(a_{ij}^l,a_{ij}^u)$表示方案 S_i 对应于指标 Q_j的测量结果(即属性值),不失一般性,假设 $a^u>a^l>0$ 。$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T\in W$ 表示属性权重向量,其中 w_j 表示属性 Q_j的权重,满足$\sum_{j=1}^n w_j=1$,$w_j>0$,$j=1,2,\cdots,n$, W 表示属性权重信息不完全的表达式集合。区间数的定义、运算性质如下。

定义 1　记 $\tilde{a}=[a^l,a^u]=\{x|a^l<x<a^u,a^l,a^u\in R\}$ 称 $\tilde{a}$ 为一个区间数,特别的,若 $a^l=a^u$则 $\tilde{a}$退化为一个实数。下面给出区间数的运算法则:

设 $\tilde{a}=[a^l,a^u]$,$\tilde{b}=[b^l,b^u]$,且 $\beta\geqslant 0$ 则:①$\tilde{a}=\tilde{b}$ 当且仅当 $a^l=b^l$和 $a^u=b^u$;②$\tilde{a}+\tilde{b}=[a^l+b^l,a^u+b^u]$;③$\beta\tilde{a}=[\beta a^l,\beta a^u]$ 其中 $\beta\geqslant 0$;特别的 $\beta=0$ 则$\beta\tilde{a}=0$;④$\tilde{a}\cdot\tilde{b}=[a^l\cdot b^l,a^u\cdot b^u]$;⑤$\tilde{a}\div\tilde{b}=[\frac{a^l}{b^u},\frac{a^u}{b^l}]$;(6) $\frac{1}{\tilde{a}}=[\frac{1}{a^u},\frac{1}{a^l}]$。

定义 2　设 $\tilde{a}=[a^l,a^u]$,$\tilde{b}=[b^l,b^u]$定义 $\tilde{a}$,$\tilde{b}$之间的距离为

收稿日期:2006-10-09
基金项目:军队科研基金资助项目
作者简介:解　瑶(1982-),女,山东昌乐人,硕士生,主要从事作战指挥情报分析与决策研究.

$$d(\tilde{a},\tilde{b})=\sqrt{|a^l-b^l|^2+|a^u-b^u|^2} \tag{1}$$

本文要解决的区间数多指标决策问题是:根据已知的区间数决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和不完全的信息权重,如何从方案集 S 中选择满意方案或对所有的方案进行排序。

2 决策原理与方法

根据传统的 TOPSIS 方法,在文献[3]给出的相对隶属度法的基础上,给出一种属性权重信息不完全的区间数多属性决策的新方法。具体步骤如下:

Step1 将区间数决策矩阵规范化,采用比重变换法,将 $\tilde{\boldsymbol{A}}=[\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$转换为 $\tilde{\boldsymbol{B}}=[\tilde{b}_{ij}]_{m\times n}$,计算公式为

$$\tilde{b}_{ij}=\tilde{a}_{ij}/\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{ij}\quad,\quad 当\ Q_j\ 为效益型指标 \tag{2}$$

$$\tilde{b}_{ij}=\frac{1}{\tilde{a}_{ij}}/\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{ij}}\quad,\quad 当\ Q_j 为成本型指标 \tag{3}$$

由区间数的运算性质有

$$\tilde{b}_{ij}^{l}=\tilde{a}_{ij}^{l}/\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{ij}^{u}\quad,\quad 当\ Q_j\ 为效益型指标 \tag{4}$$

$$\tilde{b}_{ij}^{u}=\tilde{a}_{ij}^{u}/\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{ij}^{l}\quad,\quad 当\ Q_j\ 为效益型指标 \tag{5}$$

$$\tilde{b}_{ij}^{l}=\frac{1}{\tilde{a}_{ij}^{u}}/\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{ij}^{l}}\quad,\quad 当\ Q_j 为成本型指标 \tag{6}$$

$$\tilde{b}_{ij}^{u}=\frac{1}{\tilde{a}_{ij}^{l}}/\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_{ij}^{u}}\quad,\quad 当\ Q_j 为成本型指标 \tag{7}$$

此外,属性类型还有固定性、偏离型、区间型、偏离区间型等,具体可参见文献[2] 第 8 页,在此不再详述。

Step2 构造加权规范化矩阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}=[\tilde{c}_{ij}]_{m\times n}$,其中 $\tilde{\boldsymbol{C}}$的元素 $\tilde{c}_{ij}$为

$$\tilde{c}_{ij}=\tilde{b}_{ij}w_j\quad,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

Step3 确定正负理想点 $\tilde{v}^{+}=\{\tilde{v}_1^{+},\tilde{v}_2^{+},\cdots,\tilde{v}_n^{+}\}$ 和负理想点 $\tilde{v}^{-}=\{\tilde{v}_1^{-},\tilde{v}_2^{-},\cdots,\tilde{v}_n^{-}\}$,其中

$$\tilde{v}_j^{+}=\{(v_j^{+})^{l},(v_j^{+})^{u}\}=\{\max_i\tilde{c}_{ij}^{l},\max_i\tilde{c}_{ij}^{u}\}=\{\max_i\tilde{b}_{ij}^{l}w_j,\max_i\tilde{b}_{ij}^{u}w_j\} \tag{9}$$

$$\tilde{v}_j^{-}=\{(v_j^{-})^{l},(v_j^{-})^{u}\}=\{\min_i\tilde{c}_{ij}^{l},\min_i\tilde{c}_{ij}^{u}\}=\{\min_i\tilde{b}_{ij}^{l}w_j,\min_i\tilde{b}_{ij}^{u}w_j\} \tag{10}$$

Step4 确定每个方案与正负理想点的距离;又从定义 2 有方案 S_i 到正理想点的距离 d_i^{+} 和到负理想点的距离 d_i^{-} 为

$$d_i^{+}=\sqrt{|b_{ij}^{l}w_j-v_j^{+l}|^2+|b_{ij}^{u}w_j-v_j^{+u}|^2}\quad,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{11}$$

$$d_i^{-}=\sqrt{|b_{ij}^{l}w_j-v_j^{-l}|^2+|b_{ij}^{u}w_j-v_j^{-u}|^2}\quad,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{12}$$

为了得到 d_i^{+} 和 d_i^{-} 的值,需要先确定 w_j。为此,建立多目标优化模型为

$$\begin{aligned}
\min d_i^{+}&=\sqrt{|b_{ij}^{l}w_j-v_j^{+l}|^2+|b_{ij}^{u}w_j-v_j^{+u}|^2}\quad,\quad i=1,2,\cdots,m\\
\max d_i^{-}&=\sqrt{|b_{ij}^{l}w_j-v_j^{-l}|^2+|b_{ij}^{u}w_j-v_j^{-u}|^2}\quad,\quad i=1,2,\cdots,m\\
\text{s.t.}\quad & w_j\in W,j=1,2,\cdots,n\\
&\sum_{j=1}^{n}w_j=1\\
&w_j>0,j=1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{13}$$

由于各方案是公平的,不存在偏好,可以将上式转化为单目标优化模型

$$\min d_i=\sqrt{|b_{ij}^{l}w_j-v_j^{+l}|^2+|b_{ij}^{u}w_j-v_j^{+u}|^2}-\sqrt{|b_{ij}^{l}w_j-v_j^{-l}|^2+|b_{ij}^{u}w_j-v_j^{-u}|^2}\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$\text{s.t.}\quad w_j \in W, j = 1,2,\cdots,n$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$
$$w_j > 0, j = 1,2,\cdots,n \tag{14}$$

显然，方案越接近于这个理想点越优，或越远离负理想点越优。设 S_i 相对正理想点的相对隶属度为 h_i，由模糊集合中余集的概念，S_i 相对于负理想点的相对隶属度为 $1-h_i$。

Step5　定义 S_i 的综合加权距离为

$$F_i = h_i^2 d_i^{+2} + (1-h_i)2d_i^{-2} \quad , \quad i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

求解规划问题 $\min F_i$，即令 $\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}h_i}=0$，得到

$$h_i = (1+\frac{d_i^{+2}}{d_i^{-2}})^{-1} \quad , \quad i=1,2,\cdots,n \tag{16}$$

Step6　将方案按照 h_i 由大到小进行排序，排在前面的优先选用。

3　实例分析

采用文献[5]提供的基础数据，考虑武器系统选择问题。在该决策问题中，有 5 个备选方案（即 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5），8 个指标，即固定成本 Q_1、运营成本 Q_2、性能 Q_3、噪声 Q_4、可维护性 Q_5、可靠性 Q_6、灵活性 Q_7 和安全性 Q_8，其中，Q_3,Q_5,Q_7 和 Q_8 的指标值为打分值，其范围为 1 分（最差）到 10 分（最好）之间，另外，Q_1，Q_2 和 Q_4 为成本型指标，其他 5 个为效益型指标。关于该问题的原始数据（指标权重和决策矩阵）如表 1 所示。

表 1　指标权重和决策矩阵

	w	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Q_1	[0.041 9,0.049 1]	[3.7,4.7]	[1.5,2.5]	[3,4]	[3.5,4.5]	[2.5,3.5]
Q_2	[0.084 0,0.098 2]	[5.9,6.9]	[4.7,5.7]	[4.2,5.2]	[4.5,5.5]	[5,6]
Q_3	[0.121 1,0.137 3]	[8,10]	[4,6]	[4,6]	[7,9]	[6,8]
Q_4	[0.121 1,0.137 3]	[30,40]	[65,75]	[60,70]	[35,45]	[50,60]
Q_5	[0.168 0,0.181 8]	[3,5]	[3,5]	[7,9]	[8,10]	[5,7]
Q_6	[0.213 8,0.229 4]	[90,100]	[70,80]	[80,90]	[85,95]	[85,95]
Q_7	[0.039 5,0.045 7]	[3,5]	[7,9]	[7,9]	[6,8]	[4,6]
Q_8	[0.158 8,0.170 6]	[6,8]	[4,6]	[5,7]	[7,9]	[8,10]

依据式(8)可得到加权规范化矩阵，如表 2 所示。

表 2　加权规范化矩阵

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Q_1	[0.005 3,0.008 8]	[0.010 0,0.023 9]	[0.006 3,0.011 9]	[0.005 6,0.010 2]	[0.007 2,0.014 3]
Q_2	[0.006 7,0.009 4]	[0.014 1,0.011 9]	[0.015 5,0.023 2]	[0.014 6,0.015 2]	[0.013 4,0.011 2]
Q_3	[0.028 2,0.047 3]	[0.014 1,0.028 4]	[0.014 1,0.028 4]	[0.024 6,0.042 6]	[0.021 1,0.037 9]
Q_4	[0.026 6,0.044 1]	[0.014 1,0.020 4]	[0.015 2,0.022 1]	[0.023 6,0.037 9]	[0.017 7,0.026 5]
Q_5	[0.015 1,0.035 0]	[0.015 1,0.035 0]	[0.035 3,0.062 9]	[0.040 4,0.069 7]	[0.025 3,0.048 9]
Q_6	[0.041 8,0.052 1]	[0.032 5,0.041 7]	[0.037 2,0.046 9]	[0.039 5,0.049 5]	[0.039 5,0.049 5]
Q_7	[0.003 7,0.008 5]	[0.008 6,0.015 2]	[0.008 6,0.015 2]	[0.007 4,0.013 5]	[0.004 9,0.010 2]
Q_8	[0.025 1,0.044 6]	[0.016 7,0.033 4]	[0.020 9,0.039 0]	[0.029 3,0.050 2]	[0.033 4,0.055 7]

依据原始指标权重运用线性目标规划模型(14)可求出指标的规范化权重向量：$w=(0.049\ 1, 0.084\ 0, 0.137\ 3, 0.121\ 1, 0.181\ 8, 0.213\ 8, 0.045\ 7, 0.167\ 2)$；根据式(2)-(8)可得到加权规范化决策矩阵如表 2 所示；根据式(9)和(10)可确定各方案理想点；根据式(11)、(12)求得各方案到理想点距离，进而根据式(16)可求出各方案的综合加权距离为：$h_1=0.339\ 6$，$h_2=0.097\ 6$，$h_3=0.341\ 8$，$h_4=0.651\ 7$，$h_5=0.400\ 6$；

由上面的计算结果可得出各方案的排序结果为：$S_4 > S_5 > S_3 > S_1 > S_2$。从结果可以看出，比文献[4]中结果 $c_1 = 0.4176$，$c_2 = 0.2671$，$c_3 = 0.4188$，$c_4 = 0.5777$，$c_5 = 0.4498$ 为优。

4 结束语

由结果可以看出，各方案的相对隶属度 h_i 相对于相对接近度有更大的分散性，易于作出决策与选择。在 TOPSIS 法中，根据规范化矩阵的性质，可以令正理想方案为 $v^+ = \{1,1,\cdots,1\}$，负理想方案为 $v^- = \{0,0,\cdots,0\}$，这样可以大大减少计算量。具体方法可参考文献[2]。但是，在属性值比较接近的时候，结果相差太小，精度较小的情况下，甚至出现不同属性值得到相同结果的情况。因而，在相差较大要求不高的情况下，可以近似的取值，以便减少计算量。但是，随着科技的发展，人们对于事物的准确定性越来越高，对决策的准确性也要求越高，因而大部分时候要采用改进的方法来解决问题。

参考文献：

[1] 樊治平，尤天慧. 属性权重信息不完全的区间数多属性决策方法[J]. 东北大学学报：自然科学版，2005(8)：798-800.

[2] 徐泽水. 不确定多属型决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[3] 刘华文，姚炳学. 区间数多指标决策的相对隶属度法[J]. 系统工程与电子技术，2004，26(7)：903-905.

[4] 尤天慧，樊治平. 区间数多指标决策的一种 TOPSIS 方法[J]. 东北大学学报：自然科学版，2002(9)：840-843.

[5] Yoon K. The Propagation of Errors in Multiple - Attribute Decision Analysis: a Practical Approach [J]. Journal of the Operational Research Society, 1989, 40(7): 681-686.

(编辑：田新华)

A New Method for Interval Multiple Attribute Decision - Making Problem with Incomplete Attribute Weights

XIE Yao, MAO Xiao - nan, ZHANG Bei - bei

(Air Force Command College, Beijing 100089, China)

Abstract: Based on the conventional TOPSIS and in the light of the relative membership degree method, the calculation steps are given to solve the problem of multiple attribute decision - making with incomplete information on attribute weights. The key is the relative membership degree, which is obtained by means of the synthetically weighted distance. Then, the decision is made according to the relative membership degrees. By using this new method the difficulties that occur in ranking intervals in the traditional analysis methods are overcome. This shows that the relative membership degree method is better in selecting the best and ranking alternatives than the traditional TOPSIS method. Finally, practical calculations are given, which shows that the models are feasible and practical.

Key words: multiple attribute decision - making; the relative membership degree method; interval number