

通道失配对 MUSIC 算法测向性能影响研究

刘 剑^{1,2}, 黄知涛¹, 王延伟², 黄国策²

(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

摘要:分析了通道失配条件下 MUSIC 算法测角偏差及方差, 推导了单源情况下幅度失配及相位失配引起的测角偏差和方差的具体公式。仿真结果表明, 理论分析能准确预测通道失配时 MUSIC 算法的角度偏差和方差。

关键词:测向; MUSIC; 通道失配

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2007)03-0074-04

子空间类高分辨测向算法对信号参数的估计方差接近 Cramer-Rao 方差下界, 可对多信号同时进行高分辨测向, 性能优异, 在雷达、通信等领域有广泛的应用前景。其中, MUSIC 算法可以应用于任意形状的阵列, 而且可以估计每个源的多个参数(方位角、俯仰角、极化等), 受到了广泛关注。MUSIC 算法获得高分辨性能的条件之一是各阵元通道增益的幅度和相位特性精确已知, 而实际中不可能精确测得, 总会存在一些误差, 称之为通道失配, 不大的通道失配可能会使 MUSIC 测角性能大大下降^[1-4]。本文主要分析通道失配对均布线阵和均布圆阵在单源入射时 MUSIC 算法测向性能的影响, 给出了简洁明了的解析表达式。

1 数据模型及 MUSIC 算法^[5]

假设有 k 个不相关窄带信号入射到 m 元阵列上, 信号入射方向与阵列共平面, 阵列位于远场, 则阵列第 n 次采样为 $m \times 1$ 维矢量

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{e}(n) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{e}(n)$ 为噪声矢量, $\mathbf{s}(n)$ 为信号矢量, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)]$ 为方向矩阵, $\mathbf{a}(\theta) = [e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_{x1}\cos\theta + d_{y1}\sin\theta)}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_{xm}\cos\theta + d_{ym}\sin\theta)}]^T$, λ 为波长, (d_{xi}, d_{yi}) 为阵列第 i 个阵元的坐标。假设信号与噪声为平稳的零均值随机过程, 且信号与噪声不相关, 则

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

式中: \mathbf{P} 为信号协方差矩阵, $\sigma^2\mathbf{I}$ 为噪声协方差矩阵。对 \mathbf{R} 进行特征分解

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H + \sigma^2\mathbf{G}\mathbf{G}^H \quad (3)$$

式中: $\mathbf{S} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k]$, $\mathbf{G} = [\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_M]$, $\mathbf{A} = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 且 $\{\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = \sigma^2\}$ 。由 \mathbf{S} 的列向量张成的空间称为信号子空间, 由 \mathbf{G} 的列向量张成的空间称为噪声子空间, 在噪声子空间上投影为 0 的阵列流形所对应的方向就是信号的入射方向(DOA), 这就是 MUSIC 算法的测向原理。DOA 通过寻找下式的极小值来求得

$$\hat{D}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (4)$$

式中: 符号“ $\hat{}$ ”表示估计值。

收稿日期: 2006-09-06

作者简介: 刘 剑(1978-), 男, 山东潍坊人, 博士生, 主要从事信息处理研究。

2 通道失配对 MUSIC 算法测角性能的影响

为将通道失配影响分离出来,假设由加性噪声带来的有限数据长度效应可以忽略不计,存在误差的协方差矩阵 \hat{R} 可以精确得到:

$$\hat{R} = (I + \Delta)(APA^H + \sigma^2 I)(I + \Delta)^H \quad (5)$$

矩阵 Δ 是由通道失配引起的, $\Delta = \text{diag}\{\beta_1 e^{j\phi_1}, \beta_2 e^{j\phi_2}, \dots, \beta_m e^{j\phi_m}\} - I$, β_i 为第 i 通道增益的幅度, ϕ_i 为第 i 通道增益的相位。

将 $\hat{D}(\theta)$ 作一阶泰勒展开,求其在 θ_i 处的值,可得信号入射角与真实入射角之间的偏差为^[2]

$$\hat{\theta}_i - \theta_i \approx \frac{\text{Re}\{\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \boldsymbol{\xi}_i\}}{\mathbf{a}^H(\theta_i) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_i)} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{a}^H(\theta_i) = \partial \mathbf{a}(\theta) / \partial(\theta)$, 误差矢量 $\boldsymbol{\xi}_i$ 为第 i 个源引起的误差:

$$\boldsymbol{\xi}_i = \Delta \mathbf{a}(\theta_i) + \sigma^2 (\Delta^H + \Delta) (\mathbf{A}^+)^H \mathbf{P}_i^{-1} \quad (7)$$

\mathbf{P}_i^{-1} 表示 \mathbf{P}^{-1} 的第 i 列, $(\cdot)^+$ 表示广义逆矩阵。

如果通道增益的幅度和相位失配 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在整个测向过程中保持不变,则通道失配只造成测角偏差,由式(7)可以直接得到测角偏差;如果 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在单次测向中增益保持不变,但在整个测向过程中的各次测向之间发生变化,假设 $\boldsymbol{\xi}_i$ 为随机变量且其概率统计特性已知,则可以求得测角方差。假设 $\boldsymbol{\xi}_i$ 零均值,则 $E\{\hat{\theta}_i - \theta_i\} \approx 0$ 。MUSIC 算法的测角方差为^[2]

$$C_{MU} = E\{(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2\} = \frac{\text{Re}\{\mathbf{f}_i^H \mathbf{G}^H (\mathbf{C}_{\boldsymbol{\xi}_i,1}^{ik} \mathbf{G} \mathbf{f}_i + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\xi}_i,2}^{ik} \mathbf{G} \mathbf{f}_i)^*\}}{2(\mathbf{f}_i^H \mathbf{f}_i)^2} \quad (i=1, \dots, k) \quad (8)$$

式中: $\mathbf{f}_i = \mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_i)$, $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\xi}_i,1}^{ik} = E\{\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i^H\}$, $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\xi}_i,2}^{ik} = E\{\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i^T\}$, “*” 表示共轭。

2.1 通道失配造成的测角偏差计算

若通道失配在整个测向过程中保持不变,则 MUSIC 算法测角性能下降表现为测角发生偏差,下面推导单源情况的测角偏差公式。

信号子空间与噪声子空间正交,所以

$$\mathbf{G} \mathbf{G}^H = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (9)$$

单源入射时, $\mathbf{A} = \mathbf{a}(\theta)$, 将式(9)代入式(6)得:

$$\hat{\theta} - \theta \approx \frac{\text{Re}\{\mathbf{a}^H(\theta) \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{m} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \boldsymbol{\xi}\}}{h(\theta)} \quad (10)$$

式中: $\boldsymbol{\xi} = \Delta \mathbf{a}(\theta) + \frac{1}{m \cdot \text{SNR}} (\Delta^H + \Delta) \mathbf{a}(\theta)$, $h(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) [\mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta)] \mathbf{a}(\theta)$, SNR 为信噪比。

阵元增益仅存在幅度失配时,式(10)分子为零,所以 $\hat{\theta} - \theta \approx 0$ 。即,单源入射时,对于任意形式的阵列,若仅存在幅度失配,则不会产生测角偏差。这与文献[3]的分析相一致。

阵元增益仅存在相位失配时

$$\boldsymbol{\xi} = \text{diag}\{e^{j\phi_1}, \dots, m e^{j\phi_m}\} \mathbf{a}(\theta) + \frac{2}{m \cdot \text{SNR}} \cdot \text{diag}\{\cos \phi_1, \dots, \cos \phi_m\} \mathbf{a}(\theta) - \left(1 + \frac{2}{m \cdot \text{SNR}}\right) \mathbf{a}(\theta)$$

对于均布线阵,测角偏差为

$$\hat{\theta} - \theta = 12 \frac{\frac{m-1}{2} \sum_{l=1}^m \sin \phi_l - \sum_{l=1}^m (l-1) \sin \phi_l}{\pi m (m^2 - 1) \sin \theta} \quad (11)$$

对于均布圆阵,测角偏差为

$$\hat{\theta} - \theta = \frac{2 \sum_{l=1}^m \sin\left[\frac{2\pi}{m}(l-1) - \theta\right] \sin \phi_l}{\pi m \frac{r}{\lambda/2}} \quad (12)$$

式中: r 为圆阵半径。

2.2 通道失配造成的测角方差计算

如果通道失配在单次测向中保持不变,但在整个测向过程中的各次测向之间发生变化,称之为扰动。存在扰动时,可由式(8)求得测角方差,但不直观,下面推导单源情况下扰动造成的均布线阵和均布圆阵的角度方差公式。

单源情况下,如果只存在幅度扰动,由于单次测向均不产生角度偏差,整个测向过程的角度方差自然为零;如果只存在相位扰动,不失一般性,假设各阵元增益的相位扰动 ϕ_i 独立且在 $[-\zeta, \zeta]$ 上均匀分布(ζ 为一较小的角度),则 $\sin\phi_i (i = 1, \dots, m)$ 的均值和方差分别为

$$E\{\sin\phi_i\} = 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{13}$$

$$\text{var}\{\sin\phi_i\} = \frac{1}{2} = \frac{\sin 2\zeta}{4\zeta} \quad i = 1, \dots, m \tag{14}$$

各阵元相位扰动独立,在式(11)、(12)基础上可求得均布线阵和均布圆阵的测角方差:

$$\text{var}_{\text{线阵}} = \frac{3}{\pi^2 m(m^2 - 1) \sin^2 \theta} \left(2 - \frac{\sin 2\zeta}{\zeta}\right) \tag{15}$$

$$\text{var}_{\text{圆阵}} = \frac{1}{2\pi^2 m \left(\frac{r}{\lambda/2}\right)^2} \left(2 - \frac{\sin 2\zeta}{\zeta}\right) \tag{16}$$

由式(15)、(16)可以看出,均布线阵的测角方差不但随阵元数增加而减小,还与信号入射方向有关:阵列法线方向上方差最小,越靠近线阵延长线方差越大;而均布圆阵的测角方差则与方向无关,随阵元数和半径的增大而减小。值得注意的是,圆阵孔径不变时增加阵元数也会减小测角方差。

3 仿真结果

本节对存在通道失配的单源和双源情况进行仿真,图1至图4每幅图左边是对六元均布线阵的仿真,右边是对六元均布圆阵的仿真,均布线阵阵元间距半波长,均布圆阵半径为半波长。单源情况下,信号源位于 90° 方向上,双源情况下两等功率源分别位于 85° 和 95° 。所有仿真信噪比均为10 dB。图中,理论计算值指由式(11)、(12)、(15)、(16)等式得到的计算值,理想仿真值指不考虑有限数据长度效应的仿真,实际仿真指采用数据长度为16384点的随机幅度信号及高斯白噪声进行仿真,计算角度偏差时取30次测角结果的平均。

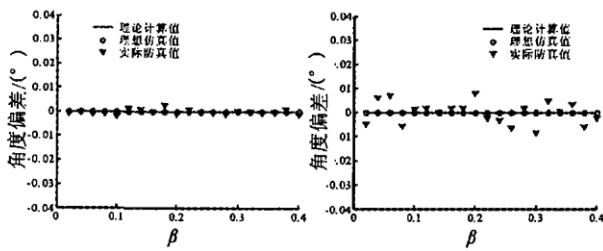


图1 单源入射时幅度失配-角度偏差图

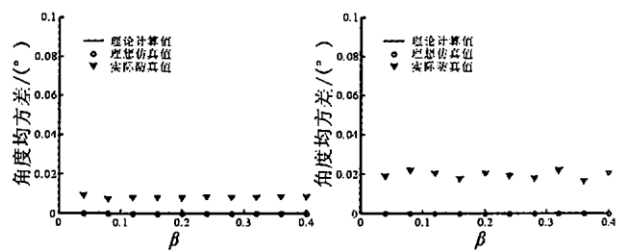


图2 单源入射时幅度扰动-角度方差图

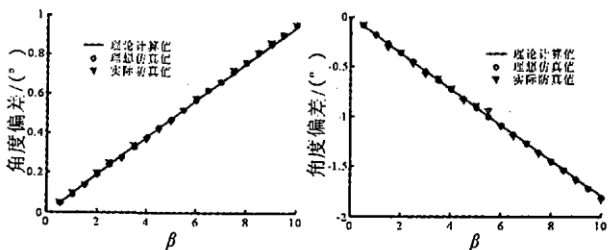


图3 单源入射时相位失配-角度偏差图

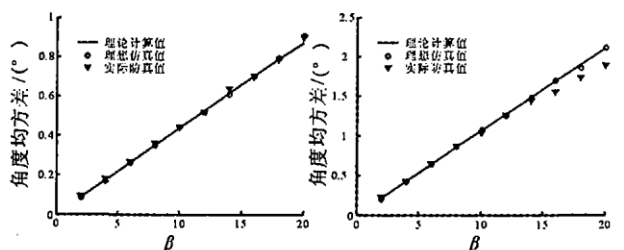


图4 单源入射时相位扰动-角度方差图

图1为单源情况下幅度失配与角度偏差的关系,图2为幅度扰动与角度方差的关系,幅度失配等于均值

为0方差为1高斯随机变量乘以 β ,角度均方差由100次的测角结果得到。图1中角度偏差基本为0,实际仿真值不为0是因为数据长度和信噪比有限。由文献[6]的(7.7a)式可得图2中由有限数据长度引起的均布线阵和均布圆阵的角度均方差分别为 0.0077° 和 0.0186° ,这与图2中实际仿真总的角度均方差基本相等,所以幅度扰动并没有影响测角精度。这就验证了单源情况下幅度失配不会产生角度偏差及方差。图3是单源情况下角度偏差随相位失配变化的曲线,相位失配为 $[1.4381^\circ, 2.0397^\circ, -0.4240^\circ, 0.1719^\circ, 1.2605^\circ, -0.2979^\circ]$,理论与仿真值相吻合,证明式(11)、(12)正确、有效。图4为单源情况下角度均方差随相位扰动变化的曲线,相位扰动为 $[-1^\circ, 1^\circ]$ 上均匀分布的随机变量乘以 β ,结果为1000次测角的均方差,理论与仿真吻合,证明式(15)、(16)正确、有效。

4 结束语

本文介绍了 MUSIC 算法测向的基本原理,分析了通道失配条件下 MUSIC 算法的测角偏差及方差,不考虑有限数据长度效应,推导了单源情况下通道幅度失配及相位失配对测角偏差影响的具体公式。仿真表明,理论分析能准确预测通道失配对 MUSIC 算法角度偏差和方差的影响。

参考文献:

- [1] Friedlander B. A Sensitivity Analysis of the MUSIC Algorithm. IEEE Trans ASSP, 1990, 38(10): 1740 - 1751.
- [2] Swindlehurst A, Kailath T. A Performance Analysis of Subspace - Based Methods in the Presence of Model Errors[J]. IEEE Trans ASSP, 1992, 40(7): 1758 - 1774.
- [3] 韩芳明,张守宏,潘复平. 阵列误差对 MUSIC 算法性能的影响与校正[J]. 西安电子科技大学学报:自然科学版, 2003, 30(5): 585 - 589.
- [4] Ferreol A, Larzabal P, Viberg M. On the Asymptotic Performance Analysis of Subspace DOA Estimation in the Presence of Modeling Errors: Case of MUSIC[J]. IEEE Trans ASSP, 2006, 54(3): 907 - 920.
- [5] Schmidt R O. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation[J]. IEEE Trans ASSP, 1986, 34(3): 276 - 280.
- [6] Stoica P, Nehorai A. MUSIC Maximum Likelihood, and Cramer - Rao Bound[J]. IEEE Trans ASSP, 1989, 37(5): 720 - 741.
- [7] 李永华,赵大炜,瞿方,等. 基于模极大值矩阵奇异值分解的信号特征提取与分类识别[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2005, 6(1): 66 - 68.

(编辑:门向生)

Performance Analysis of MUSIC Algorithm in the Presence of Channel Mismatch

LIU Jian^{1,2}, HUANG Zhi - tao¹, WANG Yan - wei², HUANG Guo - ce²

(1. School of Electronic Science and Engineering, Technology University of National Defense, Changsha 410073, China; 2. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: Performance of MUSIC algorithm for direction finding in the presence of channel mismatch is analyzed. The concrete formulas of deviation and variance of DOA (direction of arrival) with only one source impinging on an array are derived in this paper. Simulation results indicate that the formulas derived in the paper are correct.

Key words: direction finding; MUSIC; channel mismatch