一类开关动态系统最优控制问题的梯度下降算法

杨 源[1]， 梁晓龙[1]， 李炳杰[2]
(1. 空军工程大学 工程学院，陕西 西安 710038;2. 空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051)

摘 要:以开关动态系统的时间最优控制问题作为研究对象,给出了代价泛函的梯度表达式及证明过程,根据具有 Armijo 步长梯度下降算法得到数值解。通过仿真结果可以看出第一开关点为0.943 2 s,第二开关点为1.426 7 s,精度较高,说明具有 Armijo 步长梯度下降算法对于最优控制问题有良好的适应性。

关键词:最优控制; 最速下降算法 ;开关动态系统 ;Armijo 步长
中图分类号: O231.9 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2007)03-0026-03

混合系统是目前研究的热门课题[1]，开关动态系统是混合系统的特殊类型,它是几个子系统和开关法则即时指定的活动系统组成[2],现实生活中有很多例子,例如自动化系统,化学反应过程等,开关动态系统的最优控制问题至今还没有一般的理论解法或数值解法,但现在解决一些特殊类型系统的方法有了很大的进展[3],文献[4]给出了三次 Hermite 配点算法,文献[5]给出了非线性规划算法,本文给出了代价泛函的梯度[6]的证明及具有 Armijo 步长梯度下降算法。本文主要讨论自治开关动态系统,带有控制的开关动态系统算法以后将给出。

1 开关动态系统描述及梯度证明

考虑$\{f_i\}_{i=0}^{N}$在$R^n \to R^n$是有限连续可微函数序列,$T>0$,$x_0 \in R^n$,给定开关时间序列$t_i, i=1,2,\cdots,N$;并且定义$t_0=0, t_{N+1}=T$ 。

开关动态系统

$$\dot{x}(t)=f_i(x(t)) \tag{1}$$

考虑代价泛函

$$J=\int_0^T L(x(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

其中,$L:R^n \to R^n$连续可微函数,$\dot{x}(t)\in R^n$,$f_i:R^n \to R^n$有限连续可微函数序列。

设控制问题中有N个开关,将时间段$[0,t_f]$划分为$0=t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_N\leqslant t_{N+1}=t_f$,在每个分段$t_{i-1}\leqslant t<t_i$上$u(t)=u_i$(常数),当$u_i=(-1)^iM$或$u_i=(-1)^{i+1}M$时就是继电器式控制(Bang-bang),时间最优开关控制的目的是选择最优的开关点$t_i(i=1,2,\cdots,N)$使得t_f最小[5]。

令$\xi_i=t_i-t_{i-1}$,显然,$t_i=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i, i=1,2,\cdots,N+1$ 。在第i个时间分段(不妨记为ξ_i)上轨线对应的状态方程满足$\dot{x}(t)=f(x(t),u_i)=f_i(x(t))$,在时间分段$\xi_i$上轨线$x(t)$可表示为$x(t)=x(\tau_i,\xi_{i-1},\xi_{i-2},\cdots,\xi_1)$,$0\leqslant\tau_i<\xi_i$,$t=\tau_i+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{i-1}$。

下面定义与式(1)相符的主脉(costate)函数$p(t)\in R^n$

$$\dot{p}(t)=(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t)))^T p(t)-\frac{\partial L}{\partial x}(x(t)))^T \tag{3}$$

收稿日期:2006-04-03
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60674708)
作者简介:杨 源(1981-)男,陕西乾县人,博士生,主要从事嵌入式系统及图像处理研究.

其中,$t\in[t_i,t_{i+1}]$,$i=1,2,\cdots,N$,$p(T)=0$ 。

文献[6]给出梯度

$$\frac{\mathrm{d}J(\tilde{t})}{\mathrm{d}t_i}=p(t_i)^T(f_{i-1}(x(t_i))-f_i(x(t_i))) \tag{4}$$

证明:定义在时间间隔$[t_i,t_{i+1}]$主脉(costate)函数 $q_i(t)$,$i\in\{1,2,\cdots,N\}$

$$\dot{q}_i(t)=-(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t)))^Tp(t)-\frac{\partial L}{\partial x}(x(t)))^T \tag{5}$$

$$q_i(t_{i+1})=0$$

对于自治线性动态系统 $\dot{z}=\frac{\partial f}{\partial x}z$,其状态转移矩阵记作 $\Phi_i(\xi,t)$。定义函数:

$$q(t)=q_i(t)+\Phi_i(t_{i+1},t)^Tq(t_{i+1}) \qquad t\in[t_i,t_{i+1}] \tag{6}$$

$q(t):[0,T]\rightarrow R^n(i=N,N-1,\cdots,1)$是递归函数(backwards),$q(t_{N+1})=0,T_{N+1}=T$。下面证明:

$$t\in[0,T]\ ,q(t)=p(t) \tag{7}$$

对式(7)从后向前证明,即$i=N,N-1\cdots\cdots,1,t\in[t_i,t_{i+1}]$。当$i=N$时,$q(t_{N+1})=0$,$T_{N+1}=T$,可以得到$q_N(t)=q(t),t\in[t_N,T]$ 。根据式(5),对于$t\in[t_N,T]$,有 $\dot{q}_N(t)=-(\frac{\partial f_N}{\partial x}(x(t)))^Tq_N(t)-\frac{\partial L}{\partial x}(x(t)))^T,q_N(T)=0$。很显然,对于相同时间间隔$t\in[t_N,T]$内,$q_N(t)=q(t)=p(t)$ 。当$i\in\{1,\cdots,N-1\}$,假设当$t\in[t_{i+1},T]$时,式(7)成立。当$t\in[t_i,t_{i+1}]$ 时,根据状态转移矩阵及定义函数式(6),有

$$\begin{aligned}\dot{q}_i(t)&=-(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t)))^Tq_i(t)-\frac{\partial L}{\partial x}(x(t)))^T-(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t)))^T\Phi_i(t_{i+1})^Tq(t_{i+1})=\\&-(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t)))^Tq(t)-(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t)))^T\end{aligned} \tag{8}$$

由此,在时间间隔$[t_i,t_{i+1}]$ 内,式(7)成立。所以,在$[0,T]$ 内, $q(t)=p(t)$成立。根据文献[8],利用连锁规则(chain rule),得:

$$\frac{dJ(\bar{t})}{dt_i}=(q_i(t_i)+\sum_{j=i+1}^{N}q_j(t_j)^T\Phi_{j-1}(t_j,t_{j-1})\cdots\Phi_i(t_{i+1},t_i))\cdot(f_{i-1}(x(t_i))-f_i(x(t_i))) \tag{9}$$

根据递归($i=N,N-1,\cdots,1$) ,对于式(6) 令 $t=t_i$,得:

$$q_i(t_i)^T+\sum_{j=i+1}^{N}q_j(t_j)^T\Phi_{j-1}(t_j,t_{j-1})\cdots\Phi_i(t_{i+1},t_i)=q(t_i)^T \tag{10}$$

将式(5),式(10) 带入式(9),式(4) 得证。

2 最速下降算法

利用梯度公式(4) 进行具有 Armijo 步长最速下降算法。

step1:计算 $h(k)=\nabla J(\bar{t}(k))$;

step2:计算 $i(k)$,$i\geqslant 0$ 且满足 $J(\bar{t}(k)-2^{-i}h(k)-J(\bar{t}(k)))\leqslant -2^{i+1}\parallel h(k)\parallel^2$;

step3:设定 $\lambda(k)=\beta^{i(k)}$,并且 $\bar{t}(k+1)=\bar{t}(k)-\lambda(k)h(k)$。

此算法是全局收敛的,步骤2 搜索应从 $i(k-1)-1$ 或者 $i(k-1)-2$ 开始,而不是从 $i=0$ 开始[7]。

3 算例

我们取 Armijo 参数$\beta=1/2$,考虑两开关的动态系统,

系统1:$\dot{x}=\begin{pmatrix}-0.1 & 0.5\\-5 & -0.1\end{pmatrix}x=A_1x,t\in[0,t_1)$

系统2:$\dot{x}=\begin{pmatrix}-0.1 & 5\\-0.5 & -0.1\end{pmatrix}x=A_2x,t\in[t_1,t_2)$

系统3:$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = A_3 x , t \in [t_2, t_3)$

求代价泛函[9]

$J = 1/2\int_0^3 x^T(t)x(t)\,\mathrm{d}t$ 的最小值。

假定 $t_0 = 1, t_f = 3$,初始赋值为:$t_1 = 0.5, t_2 = 1.6$, $x_1(0) = 0, x_2(0) = -3$。

仿真结果:对于开关动态系统第一开关时刻为 0.943 2 s,第二开关时刻为 1.426 7 s,即 $t_1 = 0.943\,2$, $t_2 = 1.426\,7$ 。图1给出了系统状态轨线变化图。

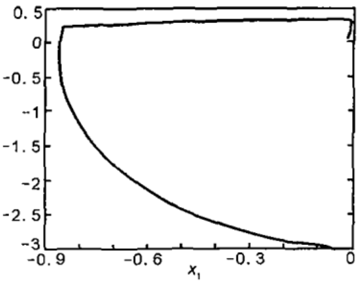

图1 状态轨线变化图

4 结束语

本文通过具有 Armijo 步长最速下降算法应用于开关动态系统,得到了该系统时间最优控制的数值仿真结果。仿真结果比较令人满意,验证了该方法的有效性。该方法可进一步应用于航天器轨道的优化控制研究。

参考文献:

[1] Luus R, Chen YangQuan. Optimal Switching Control Via Direct Search Optimization[J]. IEEE on Deision and contool, 2003: 301 - 306.

[2] Liberzon D, Morse A S. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(5): 59 - 70.

[3] Lincoln B, Bernhardsson B. LQR Optimization of Linear System Switching[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1701 - 1705.

[4] 王 劼. 双积分系统最优控制的三次 Hermite 配点法[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2004, 44(5): 56 - 59.

[5] 李炳杰, 刘三阳. 时间最优控制的非线性规划方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2006, 33(2): 299 - 303.

[6] Egerstedt M, Wardi Y, Axelsson H. Optimal Control of Switching Times in Hybrid Systems[J]. IEEE on Decision and control, 2004: 756 - 762.

[7] Polak E. Optimization Algorithms and Consistent Approximations[M]. New York: Springer - Verlag, 1997.

[8] Seidman T I. Optimal control for switching systems[A]. the 21st Annual Conf on Infor Sci and Sys[C]. Baltimore, Maryland, 1987.

[9] 赵临龙. 关 Riccati 方程可条件研究的再讨论[J]. 西北大学学报:自然科学版, 2006, 36(5): 713 - 715.

(编辑:姚树峰)

An Armijo Stepsize Gradient - descent Algorithm for Optimal Control of Switched Dynamical Systems

YANG Yuan[1], LIANG Xiao - long[1], LI Bing - jie[2]

(1. The Institute of Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 2. The Institute of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: This paper considers the problem of the Armijo step - size gradient - descent algorithm for optimal control of switched dynamical systems as an object of study. An expression of the gradient of the cost functional is given and proved. The simulation results show that the Armijo step - size gradient - descent algorithm is good in adaptability to optimal control of switched dynamical systems.

Key words: optimal control; gradient - descent algorithm; switched dynamical systems; Armijo step - size