

一类混沌系统的自适应滑模变结构控制

周凤岐, 孔令云

(西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072)

摘要:从一类更广义的非线性混沌系统出发,以 Lorenz 系统为例研究了混沌系统的控制问题。设计了一种自适应滑模变结构控制律,用该控制律,即使系统存在输入饱和及外部扰动,也可以将混沌系统的状态渐近稳定到任意指定平衡点。数字仿真表明,其控制效果极好。

关键词:混沌;混沌控制;自适应滑模变结构控制

中图分类号: O415.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009 - 3516(2007)03 - 0019 - 04

近几十年,对广泛存在于湍流、各种物理振动、多体动力学系统、化学反应等自然现象中混沌的研究取得了巨大的成就。尽管如此,迄今为止所发现的混沌吸引子的类型及数量却屈指可数。对于定常连续非线性系统,除了 Lorenz、Rossler 系统外,近些年陈关荣、吕金虎等提出了 Chen 系统、Lü 系统及统一混沌系统^[1];文献[2,3]以航天器、陀螺、气浮台等刚体的姿态运动为工程背景,得到了一类比 Lorenz 系统族更广义的系统及众多混沌吸引子,Newton - Leipnik 系统、Lorenz 系统、Chen 系统等系统都是该系统的特例。

自混沌控制 OGY 方法问世以来,对混沌系统控制的研究已越来越引起人们的广泛关注。近年来,人们已提出了邦 - 邦控制、最优控制、神经网络控制、线性反馈控制、微分几何控制、自适应控制等各种控制混沌的方法^[4-13]。众多文献的控制方法都是将控制信号线性地施加于受控系统。对于实际的物理系统,非线性激励对于对初值极为敏感的混沌系统来说,其影响是不容忽视的。

本文从文献[2,3]提出的广义混沌系统出发,以 Lorenz 系统为例,用自适应滑模变结构非线性控制律施加于系统,不仅可以将系统状态控制到相空间中任一指定平衡点,而且可以抵制外界对系统的扰动。

1 问题描述

以航天器、陀螺、气浮台等刚体的姿态运动为工程背景得到的一类非线性系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\mu_1x_2x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\mu_2x_1x_3 + u_2 = Ax + [\mu_1x_2x_3 \quad \mu_2x_1x_3 \quad \mu_3x_2x_1]^T + u \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\mu_3x_2x_1 + u_3 \end{cases}$$

式中: x_1, x_2, x_3 为状态变量; $u_i (i=1, 2, 3)$ 为控制变量; $a_{ij}, \mu_i (i, j=1, 2, 3)$ 为结构参数。

当上式中 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (10, 5, -5), A = [-0.4 \quad 1 \quad 0; -1 \quad -0.4 \quad 0; 0 \quad 0 \quad \alpha]$ (α 为可变系数)时,上式为 Newton - Leipnik 系统:

$$\dot{x}_1 = -0.4x_1 + x_2 + 10x_2x_3; \dot{x}_2 = -x_1 - 0.4x_2 + 5x_1x_3; \dot{x}_3 = \alpha x_3 - 5x_2x_1$$

当 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, -1, 1), A = [-a \quad a \quad 0; c \quad -1 \quad 0; 0 \quad 0 \quad -b]$ 时,系统变为标准的 Lorenz 系统(a, b, c 为常数):

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1); \dot{x}_2 = cx_1 - x_2 - x_1x_3; \dot{x}_3 = -bx_3 + x_2x_1$$

收稿日期:2006 - 11 - 15

作者简介:周凤岐(1942 -),男,江苏常州人,教授,博士生导师,主要从事先进控制理论及应用,航天、航空器设计,导航、制导、控制与仿真研究。

同样可得 Chen 系统为

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1); \dot{x}_2 = (c - a)x_1 + cx_2 - x_1x_3; \dot{x}_3 = -bx_3 + x_2x_1$$

Lü 系统为

$$\dot{x}_1 = a(-x_1 + x_2); \dot{x}_2 = cx_2 - x_1x_3; \dot{x}_3 = -bx_3 + x_2x_1$$

Rossler 系统为

$$\dot{x}_1 = (-x_2 + x_3); \dot{x}_2 = x_1 + ax_2; \dot{x}_3 = b - cx_3 + x_3x_1$$

可见,它是一组具有广泛代表意义的方程,有极其复杂的动力学行为。当 A 取不同的参数时,系统可能作等能周期运动、发散运动及向吸引子趋近的运动,吸引子可能为不动点、极限环、准周期环面或混沌吸引子。本文只研究对其混沌运动的控制。

现以 Lorenz 系统为例来研究对它的非线性控制。

假设控制输入为一非线性函数 $\phi(u(t))$,受控系统的动力学方程描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3 + d(t) + \phi(u(t)) \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_2x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $d(t)$ 为外界未知有界扰动, $|d(t)| \leq \sigma, \sigma > 0$ 给定; $\phi(u(t)) = f(u(t))u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} u_H & \text{if } u(t) \geq u_H \\ u(t) & \text{if } -u_L < u(t) < u_H \\ u_L & \text{if } u(t) \leq -u_L \end{cases}$$

$$f(u(t)) = \begin{cases} \frac{u_H}{u(t)} & \text{if } u(t) \geq u_H \\ 1 & \text{if } -u_L < u(t) < u_H \\ \frac{-u_L}{u(t)} & \text{if } u(t) \leq -u_L \end{cases}$$

式中 $u_H, u_L > 0$ 分别为控制的上下界, $0 < f(u(t)) \leq 1$ 。

设受控系统(1)指定待稳定的平衡点是 $x_e: (x_{1e}, x_{2e}, x_{3e})$, 由式(1)易知 $x_{1e} = x_{2e}$ 且当 $x_1(t) = x_2(t) = x_{1e}$ 时, $x_3(t) = e^{-bt}x_3(0) + \frac{x_{1e}^2}{b}(1 - e^{-bt})$, 当 $t \rightarrow \infty, x_{3e} = \frac{x_{1e}^2}{b}$ 。因此,只要保证 $x_1(t) \rightarrow x_{1e}, x_2(t) \rightarrow x_{2e}$ 则系统状态 $x(t) \rightarrow x_e$ 。

2 滑动模态选取

将式(1)中第二式中的非线性项 $-x_1x_3$ 当作外界扰动的一部分,把 x_3 当作控制的一部分,则可重写式

$$(1) \text{ 为: } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a \\ c & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} D(t) + \phi(u(t)), \dot{x}_3 = -bx_3 + x_2x_1。 \text{ 由于 } |d(t)| \leq \sigma \text{ 则 } |D(t)| = |d(t) - x_1x_3| \leq \sigma + |x_1x_3| = \Delta。$$

为选取合适的滑动模态,进行状态变换。令新状态:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

则

$$z_{1e} = \frac{1}{a}x_{1e}, z_{2e} = -x_{1e} + x_{2e} = 0$$

取新状态变量的误差: $e_1 = z_1 - z_{1e}, e_2 = z_2 - z_{2e}, e_3 = x_3 - x_{3e}$, 结合式(1)得误差系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= a(c-1)e_1 - (a+1)e_2 + a(c-1)z_{1e} + D(t) + \phi(u(t)) \\ \dot{e}_3 &= -be_3 + g(e_1, e_2) \end{aligned} \quad (2)$$

其中： $g(e_1, e_2) = -bx_{3e} + ae_1e_2 + ae_2z_{1e} + a^2(e_1 + z_{1e})^2$ ，此时可选滑动模态：

$$s(t) = ke_1(t) + e_2(t) = 0 \tag{3}$$

且 $s(t) = ke_1(t) + e_2(t) = 0, s(t) \in \mathbb{R}, k$ 为待定参数。若使 $k < 0$ ，那么由式(3)及式(2)中的第一式知 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) \rightarrow 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) \rightarrow 0$ ，那么必有一函数 $h(t)$ 使得： $|g(t)| = |g(e_1, e_2)| \leq h(t)$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \rightarrow 0$ 。对于任意给定 h_0 必存在时间 t_1 ，使得 $|g(t)| < h_0, \forall t > t_1$ 。解式(2)中的第三式得： $e_3(t) = e^{-b(t-t_1)}x_3(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-b(t-\tau)}g(\tau)d\tau$ ，所以对于 $t > t_1$ 有 $|e_3(t)| \leq e^{-b(t-t_1)}|x_3(t_1)| + h_0 \int_{t_1}^t e^{-b(t-\tau)}d\tau = e^{-b(t-t_1)}(|x_3(t_1)| - \frac{h_0}{b}) + \frac{h_0}{b}$ 。又因为当 t_1 足够大时，可使 h_0 任意小，且 $b > 0$ ，所以必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) \rightarrow 0$ 。误差系统式(3)原点稳定，因此滑动模态式(3)选取得合适。由状态变换的关系知，只要误差系统式(3)原点稳定，即可保证系统式(1)渐近稳定于平衡点 $x_e : (x_{1e}, x_{2e}, x_{3e})$ 。

3 控制律设计

根据上节滑动模态的选取方法，并考虑可达条件，可设计自适应滑模变结构控制律为

$$u(t) = -\alpha\beta y \text{sign}(s(t)), \alpha > 1 \tag{4}$$

式中， $\beta = |ke_2| + |a(c-1)e_1 - (a+1)e_2 + a(c-1)z_{1e}| + \sigma + |x_1x_3|$ ，并取自适应规律 $y = 1/f(u(t))$ 。

现在来证明控制律式(4)可以满足可达条件： $s(t)\dot{s}(t) < 0$ 。取 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2}s^2(t)$ ，则其对时间的导数： $\dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t) = s(ke_1 + e_2) = s[ke_2 + a(c-1)e_1 - (a+1)e_2 + a(c-1)z_{1e} + D(t) + \phi(u(t))]$ $\leq |s| [ke_2 + a(c-1)e_1 - (a+1)e_2 + a(c-1)z_{1e}] + D(t) + \phi(u(t)) \leq |s| [ke_2 + a(c-1)e_1 - (a+1)e_2 + a(c-1)z_{1e} + \sigma + |x_1x_3|] + s\phi(u(t)) = |s|\beta + sf(u(t))u(t) \leq |s|\beta - \alpha\beta y f(u(t))|s(t)| = (1-\alpha)|s|\beta \leq 0$ 。所以，系统可达条件满足。

4 控制效果仿真

当系统(1)中， $a=15, b=4, c=35$ ，且无外扰动、无控制，即 $d(t)=0, \phi(u(t))=0$ 时，系统的3个平衡点为 $(0,0,0)$ 和 $(\pm 11.66, \pm 11.66, 34)$ 。此时系统作混沌运动。3个状态变量从初始状态 $(-10, -10, 10)$ 开始的时间历程见图1，混沌吸引子见图2。现设系统存在周期扰动 $d(t) = 0.5\cos(3\pi t)$ ，并将非线性控制信号 $\phi(u(t))$ 加于系统， $u(t)$ 采用式(4)自适应滑模变结构控制律。为将系统稳定到指定平衡点 $(11.66, 11.66, 34)$ ，选择参数： $\sigma=0.5, k=10, \alpha=1.2, u_H = u_L = 5$ ，用上文推导的控制规律在2s之后加于系统，控制信号的时间历程见图3，受控系统3个状态变量的时间历程见图4，受控系统的相轨迹见图5。从图中可见，系统的状态逐渐被稳定到期望的平衡点，而且控制信号也逐渐收敛到零。系统振荡衰减的速度可通过控制信号的大小，即参数 α 的不同取值来调节。仿真表明控制效果良好。

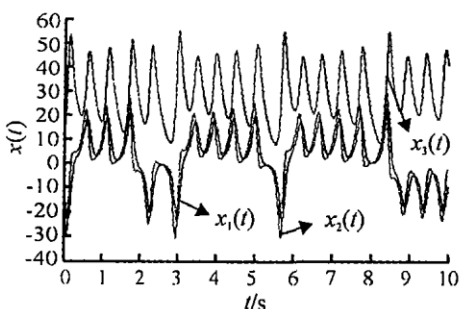


图1 自由混沌系统状态变量的时间历程

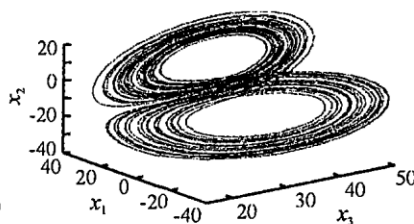


图2 自由混沌系统的混沌吸引子

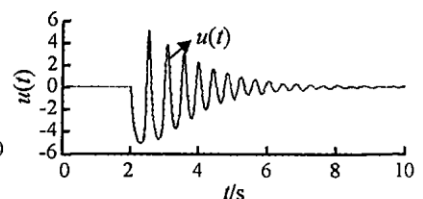


图3 控制混沌系统的控制信号时间历程

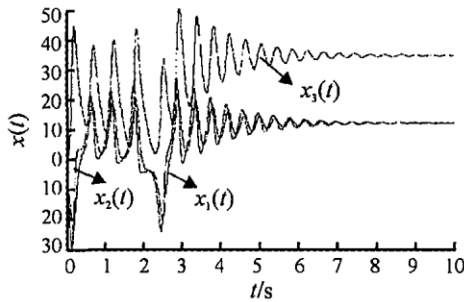


图4 受控混沌系统状态变量的时间历程

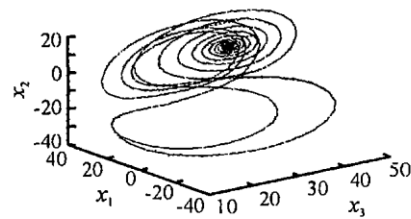


图5 受控系统在相空间的状态轨迹

5 结论

抑制混沌的方法有许多,滑模变结构控制方法更符合刚体航天器混沌姿态运动控制的工程实际。从仿真结果看,本文提出的自适应滑模变结构控制律,即使对存在输入饱和及外部扰动的系统,也可以很好地将图1-图2所示的混沌运动稳定到指定的平衡点。

参考文献:

- [1] 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析控制与同步[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [2] 孔令云,周凤岐. 用三轴气浮台进行混沌控制与反控制研究[J]. 宇航学报, 2007,26(1):86-89.
- [3] Kong L Y, Zhou F Q, Zhou J. The Control of Chaotic Attitude Motion of a Perturbed Spacecraft[A]. Proceedings of the 25th Chinese Control Conference[C]. Harbin:2006,166-172.
- [4] 张化光,王智良,黄伟. 混沌系统的控制理论[M]. 长春:东北大学出版社,2003.
- [5] Vincent TL, Yu J. Control of a Chaotic System[J]. Dyn Control, 1991,1(1):35-52.
- [6] Luce R, Kernevez JP. Controllability of Lorenz Equation[J]. Int Ser Numer Math,1991,97:257-259.
- [7] Yeap TH, Ahmed NU. Feedback Control of Chaotic Systems[J]. Dyn Control,1994,4(1):97-114.
- [8] 李刚. 智能控制理论与发展[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2003,4(3):79-83.
- [9] Gallegos JA. Nonlinear Regulation of Lorenz System by Feedback Linearization Techniques[J]. Dyn Control, 1994,4(1):126-134.
- [10] Fuh CC, Tung PC. Controlling Chaos Using Differential Geometric Method[J]. Phys Rev Lett,1995,75:2952-2957.
- [11] Zeng Y, Singh SN. Adaptive Control of Chaos in Lorenz system[J]. Dyn Control 1997,7(1):143-154.
- [12] Ge SS, Wang C. Adaptive Backstepping Control of Class of Chaotic Systems[J]. Int J Bifurcat Chaos,2000,10(5):286-300.
- [13] 关新平,范正平,彭海朋,等. 陈氏混沌系统的自适应控制[J]. 物理学报,2001,50(11):89-93.

(编辑:田新华)

Adaptive Sliding Mode Variable Structure Control for a Class of Chaotic System

ZHOU Feng - qi, KONG Ling - yun

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The control problem of chaotic system is investigated starting with a class of more generalized nonlinear chaotic system. An adaptive sliding mode variable structure control scheme for Lorenz chaos is presented. Using the proposed control scheme the state of chaotic system can be asymptotically driven to a appointed equilibrium point in spite of the presence of input saturation and external disturbance. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of its application to chaotic system control.

Key words: chaos; chaotic control; adaptive sliding mode variable structure control