第 8 卷第 1 期　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　Vol. 8　No. 1
2007 年 2 月　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　Feb. 2007

一类变分问题及其应用

薛西锋[1]，　申卯兴[2]
(1. 西北大学数学系，陕西　西安　710069;2. 空军工程大学　导弹学院，陕西　三原　713800)

摘　要:在 Banach 空间中，引入广义的广义变分问题，得出了广义变分问题的解的存在性,并把它应用到最优化中的非线性最小问题及鞍点问题。

关键词:广义变分不等式;Banach 空间; η - 单调;非线性最小问题;鞍点
中图分类号: O224　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009 - 3516(2006)01 - 0092 - 03

广义变分问题是数学领域中一个十分重要的研究方向，是最优化的理论基础,广泛应用于微分方程、控制论、对策论、经济平衡理论及许多社会、经济、军事模型之中。广义变分不等式是广义变分问题的基础,近些年关于变分不等式在理论方面研究的焦点之一多是变分不等式的推广或扩充，如:一般变分不等式、拟变分不等式、广义变分不等式、单值变分不等式、集值变分不等式及其变分不等式解的存在性、唯一性等的研究。本文在 Banach 空间中通过对广义变分不等式进行推广,并在此推广下得到了新的结果,指出了结论在最优化中的应用。

1　问题背景

在 Banach 空间中,对于广义变分不等式的研究,国内外许多学者都经常关注如下定义的广义变分不等式问题:

$S\subset E, V:S\to 2^{E^*}$,寻求 $\bar{x}\in S$,$\bar{y}\in V(\bar{x})$,满足

$$<\bar{y},x-\bar{x}>\geqslant 0,\ \forall x\in S \tag{1}$$

得到了不少结论[1-5]。着眼于一些实际应用问题背景的需要,我们引入新的广义变分不等式问题:

S,V,E 意义同式(1),$C\subset E^*$,$M:S\times C\to E^*$,$\eta:S\times S\to E$,寻求 $\bar{x}\in S$,$\bar{y}\in V(\bar{x})$满足

$$<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0,\ \forall x\in S \tag{2}$$

事实上,如果令 $M(x,y)=y$,$\eta(x,u)=x-u$ 则式(2)变为式(1),故,式(2)是式(1)的推广。

2　主要结果

定理 1　设 E 是 Banach 空间，$S\subset E$ 是紧凸集，$C\subset E^*$ 是凸闭集，$P(C)$是的凸紧子集的全体，$V:S\to P(C)$是上半连续的，$\varphi:S\times C\times S\to R$ 是连续函数,且 $\forall x\in S$;$\varphi(x,y,z)\geqslant 0$ 对任意固定的$(x,y)\in S\times C$,$\varphi(x,y,z)$ 关于 u 是拟凸的,则存在 $\bar{x}\in S$,$\bar{y}\in V(\bar{x})$ 满足 $\varphi(\bar{x},\bar{y},x)\geqslant 0,\ \forall x\in S$ 。

证明:对任意固定的$(x,y)\in S\times C$,令 $\pi(x,y)=\{s\in S:\varphi(x,y,s)=\min\limits_{u\in S}(x,y,u)\}$ 由于 φ 是连续的,且关于 u 是拟凸的,所以 $\pi(x,y)$是闭凸集，$\pi(x,y):S\times C\to S$ 是上半连续的，$V(S)=\bigcup\limits_{x\in S}V(x)$ 是紧的,由参考

收稿日期:2006 - 04 - 19
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2003A10)；陕西省教育厅自然科学专项基金资助项目(06 JK 170)
作者简介:薛西锋(1961 -),男,陕西华县人,副教授,博士生,主要从事非线性问题及解析数论研究;
申卯兴(1961 -),男,陕西合阳人,教授,主要从事防空作战决策分析及其优化理论与方法研究.

文献[2]可知 $H=\overline{\mathrm{cov}}(S)$ 是紧凸集,故 $S\times H$ 是紧凸集。

令 $F:S\times H\to S\times H, F(x,y)=\pi(x,y)\times V(x)$,则 F 是 $S\times H\to S\times H$ 的上半连续的,每点的值凸闭的,由参考文献[3]可知 F 有不动点,假设其为$(\bar{x},\bar{y})$,即$(\bar{x},\bar{y})\in F(\bar{x},\bar{y})$,因此 $\bar{x}\pi(\bar{x},\bar{y})$,$\bar{y}\in V(\bar{x})$由 π 的定义有,$\forall x\in S,\varphi(\bar{x},\bar{y},x)\geqslant\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{x})\geqslant 0$。

定理 2　E,S,C,V 如定理 1, $M:S\times C\to E^*$,$\eta:S\times S\to E$ 都是连续的,且①$\eta(x,x)=0,\forall x\in S$;② 对任意固定的$(x,y)\in S\times C$, $<M(x,y),\eta(u,x)>$ 关于 u 是拟凸的,则存在 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in V(\bar{x})$,满足 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0$, $\forall x\in S$ 。

证明:令 $\varphi(x,y,u)=<M(x,y),\eta(u,x)>$,应用定理 1 即可得出结论。

推论 1:E,S,C,V 如定理 2,,则存在 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in V(\bar{x})$ 满足式(1)。

证明:令 $M(x,y)=y,\eta(u,x)=u-x$,应用定理 2 即可得出结论。

如果在定理 2 中的 E 取为 R^n,则有下述结论:

定理 3　设 $S\subset R^n$是紧凸集, $C\subset R^n$ 是凸闭集,$V:S\to P(C)$是上半连续的,$M:S\times C\to R^n$,$\eta S\times S\to R^n$都是连续的,且 ①$\eta(x,x)=0,\forall x\in S$;②对任意固定的$(x,y)\in S\times C$, $<M(x,y),\eta(u,x)>$ 关于 u 是拟凸的,则存在 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in V(\bar{x})$,满足 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0$, $\forall x\in S$ 。

在 $E=R^n$ 情形下,还可以去掉定理 3 中的紧性。

定理 4　设 S、C 是 R^n 中的闭凸集, V,M,η 同定理 3,如果①$\eta(x,x)=0,\forall x\in S$;②对任意固定的$(x,y)\in S\times C$, $<M(x,y),\eta(u,x)>$ 关于 u 是凸函数,且存在 $\bar{u}\in S$ 及常数 $r>\|\bar{u}\|$ 满足

$$\max_{y\in V(x)}<M(x,y),\eta(u,x)>\ \leqslant 0,\forall x\in S\ \|x\|=r \tag{3}$$

则存在 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in V(\bar{x})$,满足 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0,\forall x\in S$。

证明:令 $S_r=\{x\in S,\|r\|\leqslant r\}$,则 S_r是紧凸集,由定理 3 有

$$\bar{x}\in S,\bar{y}\in V(\bar{x}),\text{满足}<<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0,\forall x\in S_r \tag{4}$$

现在要证明 $\forall x\in S$,式(4)成立。以下分两种情形讨论:

1) $\|\bar{x}\|=r$, 由式(3)及式(4)有 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>0$,

设 $x\in S$,可取充分小的 $0<\lambda<1$,使 $w=\lambda x+(1-\lambda)\bar{u}\in S_r$,由 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>$关于 u 的凸性有 $0\leqslant<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(w,\bar{x})>\ \leqslant\lambda<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>+(1-\lambda)<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(u,\bar{x})>=\lambda<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>$ 所以 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0$

2) $\|\bar{x}\|<r$,设 $x\in S$,也可取充分小的 $0<\lambda<1$,满足 $w'=\lambda x+(1-\lambda)\bar{x}\in S_r$,以下同(1)的分析。

下面给出 η - 单调下的定理。

设 $\eta:S\times S\to R^n$ 且 $\eta=(x,x)=0,\forall x\in S$; $V:S\to R^n$,如果 $<y,\eta(x,u)>+<v,\eta(u,x)>\ \leqslant 0(y\in V(x),v\in V(u))$,则称 V 是 η 单调。η 单调是一般单调的推广,令 $\eta(x,x)=u-x$,就是一般的单调性。

定理 5　$S,C,V,M,$ 同定理 4,设 $x\to\{M(x,y):y\in V(V)\}$ 在 S 上是 η 单调的,如果存在 $\bar{u}\in S,v\in V(\bar{u})$ 满足

$$\lim\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\in\\ x\in X}}<M(u,v),\eta(x,\bar{x})>>0 \tag{5}$$

则存在 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in V(\bar{x})$,满足 $<M(\bar{x},\bar{y}),\eta(x,\bar{x})>\geqslant 0,\forall x\in S$

证明:从式(5)可找到 $r>\|\bar{u}\|$,满足 $<M(\bar{u},\bar{v}),\eta(x,\overline{ux})>>0,\forall x\in S$ 且 $r=\|\bar{x}\|$, 对这样的 x,由 M 的 $\boldsymbol{\eta}$ - 单调性有 $<M(x,y),\eta(\bar{u},x)>\leqslant<M(\bar{u},\bar{v}),\eta(x,\bar{u})><0,\forall y\in V(x)$ 故定理 4 中的式(3)成立,所以由定理 4 可得到结论。

3　应用

设 X ,$D\subset R^n$,$L:X\times D\to R$,并考察下面的优化问题及鞍点问题

$$(P)\ \min_{(x,y)\in V} L(x,y) \tag{6}$$

其中 $U=\{(x,y)\ ,x\in X,y\in D,L(x,y)=\max_{v\in D}L(x,y)\ \}$，(SPP) 找 $x^*\in X\ ,y^*\in D$,满足

$$L(x^*,y^*)\leqslant L(x^*,\ y^*)\ \leqslant L(x,y^*)\ ,\forall x\in X,y\in D \tag{7}$$

由参考文献[4],(SPP)的解都是(P)的解。由参考文献[6],先引入 η - 凸的定义:

设 $\psi:S\to R^n$ 可微,称 ψ 是 η - 凸,如果存在连续的 $\eta:S\times S\to R^n$,满足;①$\eta(x,x)\ =0,\forall x\in S$;②$\psi(x)-\psi(u)\geqslant<\nabla\psi(u),\eta(x,u)>,\forall x,u\in S$。我们有下面的结论:当 ψ 是 η - 凸时, $\nabla\psi$ 是 η 单调的,上面的(SPP)就是找 $x*\ \in X\ ,\ y*\in$,满足

$$<\nabla_x L(x^*,y^*),\eta(x,x^*)>\geqslant 0,\forall x\in X \tag{8}$$

$$Y(x^*)=\{y\in D,L(x^*,y)=\max_{v\in D}L(x^*,v)\}$$

显然,若 $L(x,y)$ 可微,且对固定的 $y\in D$,关于 x 是 η - 凸的,式(8)的解一定是(SPP)的解。

定理 6 设 X 是 R^n 中的闭凸集,D 是 R^n 中的紧凸集,$L(x,y)$ 可微,且对固定的 $y\in D$,关于 x 是 η - 凸的,对固定的 $x\in X$,关于 y 是凹的,对固定的 $(x,y)\in X\times D$, $<\nabla_x L(x,y)>,\eta(u,x)\ ,\eta(u,x)$ 关于 u 是凸的,如果存在 $\bar{u}\in X,\bar{v}\in Y(\bar{v})$ 满足

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty\in\\ x\in X}} <\nabla_x L(\bar{u},\bar{v}),\eta(x,\bar{v})>>0 \tag{9}$$

则(SPP)有解,当然(P)也有解。

证明:因为 D 是 R^n 中的紧凸集,$L(x,y)$ 可微,关于 y 是凹的,所以有 $Y(x)$ 紧凸,又由于 $L(x,y)$ 可微,且对固定的 $y\in D$,关于 x 是 η - 凸的,可得到 $L(x,y)$ 是上半连续的,由此得到

$L(x,y)-L(u,v)\geqslant L(x,v)-L(u,v)\geqslant<\nabla_x L(u,v),\eta(x,v)\gg 0$

$L(x,v)-L(x,y)\geqslant L(u,y)-L(x,y)\geqslant<\nabla_x L(u,v),\eta(x,v)\gg 0$,对 $y\in Y(x)\ ,v\in Y(u)$

故 $x\to\{<\nabla_x L(x,y);y\in Y(x)\ \}$ 在 X 上是 η - 单调的,由定理 5 可得出式(8)有解,进而(SPP)有解。

参考文献:

[1] 薛西锋, 邢志栋. 集值单调算子的变分不等式[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2006, 36(1): 10 - 12.

[2] Walter Rudin. Factional Analysis [M]. 北京:机械工业出版社,2004.

[3] Vasile L Lstratescu. Fixed Point Theorem[M]. New York:D . Reidel Publishing Company, 1981.

[4] Mangasian O L,Ponstein J. Minmax and Duality in Nonlinear Programming, H. kneser. [J]. Math. Anal, Appl. 1965, 11: 504 - 518.

[5] Yao J C. The Generalized Quasi - Variational Inequality With Applications[J]. Math. Anal, Appl. 1991, 158: 139 - 160.

[6] Paridand Sen J. A Variational - like inequality for Multifunction With Applications[J]. Math. Anal, Appl., 1987, 124: 73 - 81.

(编辑:田新华)

A Type of Generalized Variation Inequality and its Applications

XUE Xi - feng[1], SHEN Mao - xing[2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, Shaanxi China; 2. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: In Banach spaces, a generalized - variation inequality is introduced as an extension of the known or generalized meaning, i. e. as a generalized - generalized - variation inequality. Some properties, theoretical results and the solution existence theorem are proved, and its application is presented subsequently in the optimal field.

Key words: generalized - variation inequality; Banach spaces; η - monotone; non - linear optimal problem; saddle point