基于直觉模糊等价关系的聚类算法

陈东锋，　雷英杰，　田　野
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800)

摘　要:首先引入直觉模糊集的模运算、直觉模糊集之间的关系及合成运算的定义,然后提出了直觉模糊集的截集定义,揭示了利用直觉模糊等价关系的分类原理,并讨论了基于直觉模糊等价关系的模糊聚类算法,从而使直觉模糊集的基本理论得到进一步扩展。最后给出了该算法的一个数值实例。

关键词:模糊集合;直觉模糊集;模糊聚类;模糊关系
中图分类号: TP182,O159　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009－3516(2006)01－0063－03

聚类分析是非监督模式识别的重要分支,已被广泛应用于模式识别、数据挖掘和模糊控制等许多领域。Zadeh模糊集通过隶属函数来描述不确定性,而模糊聚类也在许多领域得到了广泛研究和应用。Atanassov提出的直觉模糊集合(Intuitionistic Fuzzy Sets,IFSs)[1-3]通过增加新的属性参数——非隶属度函数,从而更加细腻地刻画客观世界的模糊性本质,而现实世界中很多问题也更适合用IFSs进行描述[4,5]。关于IFSs的应用研究成果,目前仅存于模式识别[6]、多属性决策[7,8]和群决策[9]等领域。本文在构造直觉模糊集的截集定义的基础上,将基于Zadeh模糊等价关系的聚类方法扩展到IFSs上,并给出一个数值算例。

1　预备知识

定义1(直觉模糊集[2]) 设 X 是一个有限论域,则 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的一个直觉模糊集 A 为 $A=\{\langle x_j,\mu_A(x_j),v_A(x_j)\rangle \mid x_j\in X\}$,其中 $\mu_A(x):X\to[0,1]$ 和 $v_A:X\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数和非隶属函数,且对于 A 上的所有 $x_j\in X$,有 $0\leqslant\mu_A(x_j)+v_A(x_j)\leqslant 1$ 成立。对于 X 中的每一个直觉模糊子集,称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-v_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数。

模运算是模糊集合运算的一般化描述[10],下面的定理列出了一些典型的对偶模。

定理1　下列每组中的 T 模与 S 模构成一对对偶模:

1) $T_1(x,y)=\max\{0,x+y-1\}$, $S_1(x,y)=\min\{1,x+y\}$;

2) $T_2(x,y)=xy$, $S_2(x,y)=x+y-xy$;

3) $T_3(x,y)=\max\{x+y\}$, $S_3(x,y)=\min\{x+y\}$ 。

定义2 (直觉模糊关系[11,12]) 设 X 和 Y 是普通、有限、非空集合或论域.定义在直积空间 $X\times Y$ 上的直觉模糊子集称为从 X 到 Y 的二元直觉模糊关系,记为:$R=\{\langle(x,y),\mu_R(x,Y),v_R(x,y)\rangle \mid x\in X,y\in Y\}$,其中 $\mu_R:X\times Y\to[0,1]$ 和 $v_R:X\times Y\to[0,1]$ 满足条件 $0\leqslant\mu_R(x,y)+v_R(x,y)\leqslant 1,\forall(x,y)\in X\times Y$。把 $X\times Y$ 上直觉模糊子集的全体用 $\mathrm{IFR}(X\times Y)$ 来表示。

定义3 设 R 是 X 上的直觉模糊关系[5,10],即 $R\in\mathrm{IFR}(X\times X)$,①若 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上自反、对称关系,则称 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的直觉模糊相似关系,简称相似关系。当 X 为有限集时,称 $\boldsymbol{R}$ 为直觉模糊相似矩阵;②若 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上自反、对称、传递关系,则称 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的直觉模糊等价关系,简称等价关系。当 X 为有限集时,称 $\boldsymbol{R}$ 为直觉模糊

收稿日期:2006－03－07
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2006F18)
作者简介:陈东锋(1979－),男,山东莱芜人,博士生,主要从事智能信息处理与智能决策研究;
雷英杰(1956－),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要从事智能信息处理与智能系统、智能决策等研究.

等价矩阵。

定义 4 (直觉模糊合成) 设 $\alpha,\beta,\lambda,\rho$ 是 T-模或 S-模,但不必是两两对偶模,$\boldsymbol{R}\in \mathrm{IFR}(X\times Y)$ 且 $Q\in \mathrm{IFR}(Y\times Z)$,则 $\boldsymbol{R}$ 与 Q 的直觉模糊合成是指从 X 到 Z 的一个直觉模糊关系,记为 $\boldsymbol{R}$。Q ,其隶属函数和非隶属函数分别为

$$\mu_{R^{\alpha,\beta}_{\lambda,\rho}Q}(x,z)=\underset{y}{\alpha}\{\beta[\mu_R(x,y),\mu_Q(y,z)]\} \quad ,v_{R^{\alpha,\beta}_{\lambda,\rho}Q}(x,z)=\underset{y}{\lambda}\{\rho[\mu_R(x,y),v_Q(y,z)]\}$$

且满足 $\mu_{R^{\alpha,\beta}_{\lambda,\rho}Q}(x,z)+v_{R^{\alpha,\beta}_{\lambda,\rho}Q}(x,z)\leqslant 1,\forall(x,z)\in X\times Z$ 且 $\forall y\in Y$。

定理 2 假定 $\boldsymbol{R}^{(1)}=[(\mu_{ij}^{(1)},v_{ij}^{(1)})]$ 是相似关系矩阵,则通过直觉模糊关系合成运算得到 $I<R^{(1)}<\cdots<R^{(n)}=R^{(n+1)}=\cdots$,其中 $I=[(0,1)]$,$R^{(n)}=R^{(1)}\circ R^{(1)}\circ\cdots R^{(1)}$($n$ 个 $R^{(1)}$ 做合成运算)。则 $R^{(n)}$ 称为模糊关系 $R^{(1)}$ 的传递闭包,$\boldsymbol{R}^{(n)}$ 是直觉模糊等价关系;如果 n 不能取有限值,那么 $\lim_{n\to\infty}R^{(n)}=R^{(\infty)}$ 是直觉模糊等价关系。

由此可见,任何直觉模糊关系,不论它是否具有传递性,其传递闭包总是具有传递性的。定理 2 给出了由直觉模糊相似关系计算直觉模糊等价关系的方法,定理的证明过程见文献[5]。

定义 5(直觉模糊集的截集)设 $A=\{\langle x_j,\mu_A(x_j),v_A(x_j)\rangle \mid x_j\in X\}$ 为有限论域 X 上的一个 IFS,对 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$,且 $\alpha+\beta\leqslant 1$,称集合 $A_{(\alpha,\beta)}=\{x\mid\mu_A(x)\geqslant\alpha,v_A(x)\leqslant\beta,x\in X\}$ 为直觉模糊集 A 的(α,β)截集。(α,β)称为置信水平或置信度。

对每组(α,β),都能确定 X 上的一个普通集合,它是直觉模糊集合 A 在(α,β) 这一信任程度上的逆像。显然,若 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$,$0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant 1$ 且 $0\leqslant\alpha_1+\beta_1\leqslant 1,0\leqslant\alpha_2+\beta_2\leqslant 1$,则 $A_{(\alpha_2,\beta_2)}\subseteq A_{(\alpha_1,\beta_1)}$。根据直觉模糊关系的性质,自反直觉模糊关系的任意$(\alpha,\beta)$ 截集都是自反的,对称直觉模糊关系的任意(α,β)截集都是对称的,传递直觉模糊关系的任意 (α,β)截集都是传递的,因此下面的定理是显然的。

定理 3 一个直觉模糊关系 R 是等价的,当且仅当 R 的任意(α,β) 截集是等价的。

根据该定理,欲用一个直觉模糊等价关系对论域的元素进行分类,可用其(α,β) 截集(或矩阵)来近似地划分,而且 α 越小、β 越大,分类越粗;反之,分类越细。特别当$(\alpha,\beta)=(1,0)$ 时,是分得最细的情形。聚类分析仅靠事物间的相似性作为类属划分的准则,而 IFS 通过增加新的属性函数使得对相似性的刻画更准确。根据该思路,结合文献[5]的研究成果,下面给出基于直觉模糊等价关系的聚类算法。

2 直觉模糊聚类算法

假设有 m 个对象,表征其属性特征的数据用 IFS 表示。根据直觉模糊等价关系的分类原理,给出面向 IFS 的聚类算法步骤如下:

Step1 根据各分类对象间的相似性统计量[5,13],确定待分类对象集合 X 上的直觉模糊相似关系 $R^{(1)}=[\mu_{ij}^{(1)},v_{ij}^{(1)}]_{m\times m}$,令 $I=\{1,2,\cdots,m\}$ 。给定置信度(α,β) ,其中 $0<\alpha,\beta\leqslant 1,0<\alpha+\beta\leqslant 1$ 。

Step2 从相似关系矩阵 $\boldsymbol{R}^{(1)}$ 出发,根据定理 2 基于 T、S 模运算进行合成运算得到等价关系矩阵 $\boldsymbol{R}=[\mu_{ij},v_{ij}]_{m\times m}$。

Step3 若满足 $i=j$ 、或 $\mu_{ij}<\alpha$ 或 $v_{ij}>\beta$ 之一,则令$(\mu_{ij},v_{ij})=0,1$。

Step4 在 I 中选择 i_1,i_2,使得$(\mu_{i_1i_2},v_{i_1i_2})=(\max\{\mu_{ij}\mid i<j,i,j\in I\},\min\{v_{ij}\mid i<j,i,j\in I\})$ 。

此时,如果$(\mu_{i_1i_2},v_{i_1i_2})\neq(0,1)$,则取 $C=\{i_1,i_2\}$,并转到 Step5 ;否则按剩余 I 中的序号得到对应的模糊划分,算法停止。

Step5 在 I/C 中选择 i_3,使得 $\sum_{i\in C}\mu_{ii_3}=\max\{\sum_{i\in C}\mu_{ij}\mid j\in I,\mu_{ij}\neq 0,\forall i\in C\}$; $\sum_{i\in C}\mu_{ii_3}=\min\{\sum_{i\in C}v_{ij}\mid j\in I,v_{ij}\neq 0,\forall i\in C\}$。若存在这样的 i_3,则将 i_3 添加到到 C ,即 $C=\{i_1,i_2,i_3\}$,并转 Step5 。否则将 C 输出,代表一类,并进入下一步。

Step6 令 $I=I/C$,并转 Step4。

3 实例研究

给定一个 7×7 的直觉模糊相似关系矩阵 $\boldsymbol{R}^{(1)}$,不妨取$(\alpha,\beta)=(0.35,0.6)$,$\boldsymbol{R}^{(1)}$为对称矩阵。

$$R^{(1)}=\begin{bmatrix}(1,0)\\(0.75,0.2) & (1,0)\\(0.25,0.7) & (0.5,0.5) & (1,0)\\(0,0.9) & (0.25,0.7) & (0.72,0.2) & (1,0)\\(0.25,0.7) & (0.5,0.5) & (0.5,0.5) & (0.75,0.2) & (1.0)\\(0.25,0.7) & (0,0.9) & (0.5,0.5) & (0.75,0.2) & (0.5,0.5) & (1,0)\\(0.5,0.5) & (0.75,0.2) & (0.75,0.2) & (0.5,0.5) & (0.75,0.2) & (0.25,0.7) & (1,0)\end{bmatrix}。$$

下面给出相应的聚类步骤:

Step1 设定 $I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 。

Step2 基于 T_1、S_1模运算进行模糊合成得到等价关系矩阵

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{bmatrix}(1,0)\\(0.75,0.2) & (1,0)\\(0.25,0.6) & (0.5,0.4) & (1,0)\\(0,0.6) & (0.25,0.4) & (0.72,0.2) & (1,0)\\(0.25,0.6) & (0.5,0.4) & (0.5,0.4) & (0.75,0.2) & (1.0)\\(0.25,0.6) & (0,0.4) & (0.5,0.4) & (0.75,0.2) & (0.5,0.4) & (1,0)\\(0.5,0.4) & (0.75,0.2) & (0.75,0.2) & (0.5,0.2) & (0.75,0.2) & (0.25,0.4) & (1,0)\end{bmatrix}。$$

Step3 对所有的 $i=j$,若满足 $\mu_{ij}<0.35$ 或 $v>0.6$,则设定 $(\mu_{ij},v_{ij})=(0.1)$。

Step4 在 I 中选择 $i_1=2,i_l=1$,使得 $(\mu_{21},v_{21})=(0.75,0.2)=(\mu_{\max},v_{\min})$,$C=\{1,2\}$ 。

Step5 存在 $i=7$,使得 $(\mu_{17},v_{17})+(\mu_{27},v_{27})=(1.25,0.6)=(\max_{K/C}((\mu_{21},\mu_{21})\min_{K/C}(v_1+v_2)))$,则 $C=\{1,2,7\}$。

Step6 令 $I=\{3,4,5,6\}$;如此继续转 Step4。最后可得到聚类结果为: $\{1,2,7\}$,$(3,4,5,6)$ 。

理论分析和实例结果表明:①选择不同的合成运算会得到不同的聚类结果,而 T_1、S_1运算可得到比其它运算更为合理的聚类结果,这是因为其它合成运算对信息的丢失较大;②置信度 (α,β)决定了分类的粗细并影响最后的结果,在实际应用中需适当选择。

4 结束语

本文构造了 IFS 的截集等相关定义,揭示了利用直觉模糊等价关系的分类原理,将传统模糊集上基于模糊等价关系的聚类算法推广到 IFS 上,建立的直觉模糊聚类算法是对传统模糊聚类算法的推广,但其内涵已经扩展为 IFS。该算法不仅为不确定信息提供了一种更合理的表达方式,而且丰富和发展了传统的模糊聚类算法。

参考文献:

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1) : 87 -96.

[2] Atanassov K. More on Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33 (1) : 37 -46.

[3] Atanassov K. New Operations Defined Over the Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61 (2) : 137 - 142.

[4] De S K, Biswas R, Roy A R. An Application of Intuitionistic Fuzzy Sets in Medical Diagnosis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117(2):209 -213.

[5] Wen - Liang Hung, Jinn - Shing Lee, Cheng - Der Fuh. Fuzzy Clustering Based on Intuitionistic Fuzzy Relations[J]. International Journal of Uncertainty Fuzziness & Knowledge - Based Systems, 2004, 12(4):513 -529.

[6] Dengfeng L I, Chuntian Cheng. New Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets and Application to Pattern Recognitions [J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23 (13): 221 -225.

[7] Pasi G, Yager R. Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Graph Interpretations of Multi - Person Multi - Criteria Decision Making: Generalized net Approach[A]. Intelligent Systems, 2004. Proceedings. 2004 2nd International IEEE Conference[C]. 2004: 434 - 439.

(下转第91页)

(上接第65页)

[8] Deng - Feng Li. Multiattribute Decision Making Models and Methods Using Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Journal ofComputer and System Sciences, 2005, 70(1):73 - 85.

[9] Szmidt E, Kacprzyk J. A Concept of Similarity for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Use in Group Decision Making[A]. Fuzzy Systems, 2004. Proceedings. 2004 IEEE International Conference[C]. 2004:1129 - 1134.

[10] 何新贵. 模糊知识处理的理论与技术(第2版)[M]. 北京:国防工业出版社,1999..

[11] Burillo P, Bustince H. Intuitionistic Fuzzy Relations(Part I)[J]. Mathware and Soft Computing ,1995,(2):5 - 38.

[12] 雷英杰,王宝树,苗启光. 直觉模糊关系及其合成运算[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(2):113 - 118.

[13] 高新波. 模糊聚类分析及其应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2004.

[14] 雷英杰, 王宝树. 拓展模糊集之间的若干等价变换 [J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(10) : 1414 - 1417.

(编辑:田新华)

Clustering Algorithm Based on Intuitionistic Fuzzy Equivalent Relations

CHEN Dong - feng, LEI Ying - jie, TIAN Ye

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: Firstly, the definitions of modular operations, the relationship between intuitionistic fuzzy sets (IFSs) and their composition operations are introduced, then the definition of truncated set for IFSs is presented, and the principle for classification using intuitionistic fuzzy equivalent relations is reveled. The clustering algorithm based on intuitionistic fuzzy equivalent relations is discussed, so the basic theorems of IFSs are further generalized. Finally, a numerical example is given.

Key words: fuzzy sets; intuitionistic fuzzy sets; fuzzy clustering; fuzzy relations