距离空间之间的非线性 Lipschitz - 算子

陈广锋[1,2]， 曹怀信[2]， 赵勇斌[3]
(1. 西安文理学院，陕西 西安 710062;2. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，陕西 西安 710065;
3. 空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051)

摘　要:引入并研究了两个距离空间之间、距离空间与 Banach 空间之间的 Lipschitz - α 算子,讨论了这类算子的可逆性,并给出了可逆性的一个扰动定理。

关键词:距离空间; Lipschitz - α 算子; 可逆性; 算子空间
中图分类号: O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009 - 3516(2006)06 - 0084 - 03

设 X,Y 为 Banach 空间,$T:X\rightarrow Y$ 为一非线性算子(即不要求线性),如果存在正常数 M ,使得 $\|Tx-Ty\|\leqslant M\|x-y\|$, $\forall x,y\in X$ 则称 T 是 Lipschitz 算子。文[1-6]研究了这类算子的大量性质,并给出一系列深刻而有意义的结果。文[7]将这一概念推广到更一般的情况，引入了 Lipschitz - α 算子,并讨论了这类算子的可逆性及算子列的收敛性,并证明了过零的 Lipschitz - α 算子空间是 *Banach* 空间。文[8]在文[7]的基础上中引入了两个 Banach 空间之间 的非线性 Lipschitz - α 算子的 豫解集、谱集、谱半径等概念并证明了它们的一系列重要性质。然而正如我们所知,距离空间与 Banach 空间无论是拓扑结构还是代数结构都 有很大的不同,能否在更一般的距离空间之间来讨论 Lipschitz - α 算子及其性质呢? 基于这一点，本文引入并研究了两个距离空间之间、距离空间与 Banach 空间之间的 Lipschitz - α 算子,讨论了这类算子的可逆性,并给出了可逆性的一个扰动定理。

本文用(D,d),(D_1,d_1),(D_2,d_2) 等表示元素个数不少于2 的非紧距离空间,用 X,Y,Z 等表示数域 F (R 或 C)上的非零 Banach 空间。用 I_X表示 Banach 空间 X 上的恒等算子。

1　非线性 Lipschitz - α 算子

定义1　设 $T:D_1\rightarrow D_2$是一非线性算子，$\alpha\in(0,\infty)$是一正数，若存在正常数 M ，使得

$$d_2(Tx,Ty)\leqslant M\cdot d_1^{\alpha}(x,y),\ \forall x,y\in D_1 \tag{1}$$

则称 T 为从 D_1到 D_2的 Lipschitz - α 算子,简称为 Lip - α 算子;若同时存在 $m>0,M>0$ 使得

$$m\cdot d_1^{\alpha}(x,y)\leqslant d_2(Tx,Ty)\leqslant M\cdot d_1^{\alpha}(x,y),\ \forall x,y\in D_1 \tag{2}$$

则称 T 为双 Lipschitz - α 算子。记

$$L^{\alpha}(D_1,D_2)=\{T:D_1\rightarrow D_2 \mid T\text{ 是 Lip - }\alpha\text{ 算子}\};$$

$$L^{\alpha}_{e_1,e_2}(D_1,D_2)=\{T:D_1\rightarrow D_2 \mid T\text{ 是 Lip - }\alpha\text{ 算子且 }T(e_1)=e_2,e_1\in D_1,e_2\in D_2\text{。}$$

定义2　对 $T\in L^{\alpha}(D_1,D_2)$,称

$$L_{\alpha}(T)=\sup_{x\neq y}\frac{d_2(Tx,Ty)}{d_1^{\alpha}(x,y)},\quad l_{\alpha}(T)=\inf_{x\neq y}\frac{d_2(Tx,Ty)}{d_1^{\alpha}(x,y)} \tag{3}$$

分别为 T 的大 Lipschitz - α 数与小 Lipschitz - α 数。

设 $T_1\in L^{\alpha}(D_1,D_2)$. $T_2\in L^{\beta}(D_2,D_3)$ 定义算子 $T_2T_1:D_1\rightarrow D_3$为

收稿日期:2006 - 03 - 15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19971056)
作者简介:陈广锋(1973 -),男,陕西蓝田人,讲师,硕士,主要从事算子理论与算子代数研究;
曹怀信(1958 -),男,陕西长武人,教授,博士生导师,主要从事算子代数、算子理论与量子计算研究.

$$T_2T_1(x)=T_2(T_1(x)),\forall x\in D_1 \tag{4}$$

不难证明以下命题成立.

定理 1　式(4)所定义的算子 $T_2T_1\in L^{\alpha\beta}(D_1,D_3)$ 且

$$l_\beta(T_2)(l_\alpha(T_1))^\beta\leqslant l_{\alpha\beta}(T_2T_1)\leqslant L_{\alpha\beta}(T_2T_1)\leqslant L_\beta(T_2)(L_\alpha(T_1))^\beta \tag{5}$$

证明

$$\sup_{x\neq y}\frac{d_3(T_2T_1x,T_2T_1y)}{d_1^{\alpha\beta}(x,y)}=\sup_{x\neq y}\frac{d_3(T_2(T_1x),T_2(T_1y))}{d_1^{\alpha\beta}(x,y)}\leqslant$$

$$\sup_{x\neq y}\frac{L_\beta(T_2)d^\beta(T_1x,T_2y)}{d^{\alpha\beta}(x,y)}\leqslant L_\beta(T_2)(L_\alpha(T_1))^\beta$$

知 $T_2T_1\in L^{\alpha\beta}(D_1,D_3)$ 且 $L_{\alpha\beta}(T_2T_1)\leqslant L_\beta(T_2)(L_\alpha(T_1))^\beta$ 由

$$\inf_{x\neq y}\frac{d_3(T_2T_1x,T_2T_1y)}{d_1^{\alpha\beta}(x,y)}=\inf_{x\neq y}\frac{d_3(T_2(T_1x),T_2(T_1y))}{d_1^{\alpha\beta}(x,y)}\geqslant$$

$$\inf_{x\neq y}\frac{L_\beta(T_2)d_2^\beta(T_1x,T_2y)}{d_1^{\alpha\beta}(x,y)}\geqslant L_\beta(T_2)(L_\alpha(T_1))^\beta$$

知 $L_\beta(T_2)(L_\alpha(T_1))^\beta\leqslant l_{\alpha\beta}(T_2T_1)$ 故 $L_\beta(T_2)l_\beta(T_2)^\beta\leqslant l_{\alpha\beta}(T_2T_1)\leqslant L_{\alpha\beta}(T_2T_1)\leqslant L_\beta(T_2)(L_\alpha(T_1))^\beta$。

2　Lipschitz - α 算子的可逆性

定义 3　设 $T\in L^\alpha(D_1,D_2)$ 为双 Lipschitz - α 算子且 $T(D_1)=D_2$,则称 T 可逆。并用 $L_{Inv}^\alpha(D_1,D_2)$ 来记从 D_1 到 D_2 的全体可逆算子之集。

定义 4　设 $T\in L^\alpha(D_1,D_2)$,若 $l_\alpha(T)>0$,则称 T 为 下有界的 Lipschitz - α 算子. 不难看出 T 为 下有界的 Lipschitz - α 算子$\Leftrightarrow$ $T\in L^\alpha(D_1,D_2)$为双 Lipschitz - α 算子。

定理 2　设 D_1,D_2为完备的距离空间且 $T\in L^\alpha(D_1,D_2)$,则以下叙述等价:

1) $T\in L_{Inv}^\alpha(D_1,D_2)$;

2) T 下有界且 $T(D_1)$在 D_2中稠密;

3) 存在 $S\in L^{1/\alpha}(D_2,D_1)$ 使 $ST=I_{D_1},TS=I_{D_2}$。

证明 1)$\Rightarrow$2) 是显然的。

2)$\Rightarrow$1) 只需证明 $T(D_1)$ 是闭的即可. 设 T 是下有界的,则 $l_\alpha(T)>0$,从而存在 $\varepsilon>0$ 使得$\inf\limits_{x\neq y}\dfrac{d_2(Tx,Ty)}{d_1^\alpha(x,y)}\geqslant\varepsilon>0$ 设$\{Tx_n\}_{n=1}^{+\infty}$是 $T(D_1)$ 中的 Cauchy 列,由

$$d_1(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon^{-1/\alpha}d_2^{1/\alpha}(Tx_n,Tx_m)$$

知$\{Tx_n\}_{n=1}^{+\infty}$为 D_1中的 Cauchy 列,由 D_1的完备性知 存在 x 使 $d_1(x_n,x)\to0(n\to+\infty)$,由 T 的连续性知 $d_2(Tx_n,Tx_m)\to0(n\to+\infty)$ 故 $T(D_1)$ 是闭的。

1)$\Rightarrow$3) 设 $T\in L_{Inv}^\alpha(D_1,D_2)$。令 $S=T^{-1}$,对任意的 $y_1,y_2\in D_2,y_1\neq y_2$,有

$$0<l_\alpha(T)d_1^\alpha(Sy_1,Sy_2)\leqslant d_2(TSy_1,TSy_2)=d_2(y_1,y_2) \tag{6}$$

从而可得

$$\frac{d_1(Sy_1,Sy_2)}{d_2^{1/\alpha}(y_1,y_2)}\leqslant[l_\alpha(T)]^{1/\alpha} \tag{7}$$

故 $S\in L^{1/\alpha}(D_2,D_1)$ 且 $L_{1/\alpha}(S)\leqslant[l_\alpha(T)]^{1/\alpha}$。

3)$\Rightarrow$1) 设 3) 成立,则 T 为满射. 从而对 任意的 $x_1,x_2\in D_1,x_1\neq x_2$,有

$$d_1(x_1,x_2)=d_2(STx_1,STx_2)\leqslant L_{1/\alpha}(S)d_2^{1/\alpha}(Tx_1,Tx_2) \tag{8}$$

从而

$$\frac{d_2(Tx_1,Tx_2)}{d_1^{1/\alpha}(x_1,x_2)}\geqslant[l_\alpha(S)]^{1/\alpha}>0 \tag{9}$$

由此可得 $l_\alpha(T)\geqslant[l_{1/\alpha}(S)]^{-\alpha}>0$,故 $T\in L_{Inv}^\alpha(D_1,D_2)$ 。

推论 设 D_1,D_2 为完备的距离空间，若 $T\in L^{\alpha}_{Inv}(D_1,D_2)$，则 $T^{-1}\in L^{1/\alpha}(D_2,D_1)$ 且

$$L_{1/\alpha}(T^{-1})=[l_{\alpha}(T)]^{1/\alpha},l_{1/\alpha}(T^{-1})=[l_{\alpha}(T)]^{1/\alpha} \tag{10}$$

设 (D,d) 为距离空间，Y 为 Banach 空间，$A,B\in L^{\alpha}(D,Y)$，$\lambda,\mu\in F$ 定义

$$(\lambda A+\mu B)(x)=\lambda Ax+\mu Bx,\ \forall x\in D \tag{11}$$

定理3 若 (D,d) 为完备的距离空间，Y 为 Banach 空间，$T\in L^{\alpha}(D,Y)$，则以下叙述等价：

1) $T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$；

2) T 下有界且 $T(D)$ 在 Y 中稠密；

3) 存在 $S\in L^{1/\alpha}(Y,D)$ 使 $ST=I_D,TS=I_Y$；

4) 存在 $T_0\in I(D,Y)$ 使得 $T_0+T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$.

证明 只需证明 1)$\Leftrightarrow$4)。

1)$\Rightarrow$4) 设 $T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$，则 $l_{\alpha}(T)>0$ 且 $T(D)=Y$. 取 $T_0=0\in I(D,Y)$，则 $l_{\alpha}(T+T_0)=l_{\alpha}(T)>0$ 且 $(T+T_0)(D)=T(D)=Y$，从而 $T_0+T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$。故4)成立。

4)$\Rightarrow$1) 若存在 $T_0\in(D,Y)$ 使得 $T_0+T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$，易得 $0<l_{\alpha}(T+T_0)\leqslant l_{\alpha}(T)+l_{\alpha}(T_0)$ 且由 $Y=(T+T_0)(D)=T(D)+T_0(D)$ 知 $T(D)=Y$，故，从而1)成立，$T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$。

定理4 设 $T\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$，$S\in L^{\alpha}(D,Y)$ 若 $L_{\alpha}(S)<l_{\alpha}(T)$，则 $T+S\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$ 且 $L_{1/\alpha}((T+S)^{-1})=[l_{\alpha}(T+S)]^{-1/\alpha}\leqslant[L_{\alpha}(T)-L_{\alpha}(S)]^{-1/\alpha}$。

证明 由 $L_{\alpha}(S)<l_{\alpha}(T)$ 知 $0<L_{\alpha}(S)<l_{\alpha}(T)$，从而由可得 $l_{\alpha}(T+S)\geqslant|l_{\alpha}(T)-l_{\alpha}(S)|>0$，即 $T+S$ 为下有界算子。又由 $(T+S)(D)=T(D)+T(S)=T(D)=Y$ 知 $T+S$ 为满射。故 $T+S\in L^{\alpha}_{Inv}(D,Y)$，由式(10)可得 $L_{1/\alpha}((T+S)^{-1})=[l_{\alpha}(T+S)]^{-1/\alpha}\leqslant[L_{\alpha}(T)-L_{\alpha}(S)]^{-1/\alpha}$。

参考文献：

[1] 徐宗本，王利生. 非线性 Lipschitz 算子的定量性质 -（Ⅰ）Lip 数[J]. 应用数学学报，1996，19(2)：175 - 184.

[2] 王利生，徐宗本. 非线性 Lipschitz 算子的定量性质 -（Ⅱ）glb - Dahlquist 数[J]. 西安交通大学学报，1996，30(12)：117 - 124.

[3] 王利生，徐宗本，陈白利. 非线性 Lipschitz 算子的定量性质 -（Ⅲ）glb - Lipschitz 数[J]. 数学学报，1999，42（3）：395 - 402 .

[4] 王利生，徐宗本. 非线性 Lipschitz 算子的定量性质 -（Ⅳ）谱理论[J]. 数学学报，1995，38(5)：628 - 631 .

[5] 王利生，徐宗本. 空间中非线性 Lipschitz 连续算子的定量性质[J]. 数学学报，1999，42(6)：1111 - 1118 .

[6] Pourciau B H. Analysis and Optimization of Lipschitz Continuous Mapping[J]. J. Optim. Theory and Appl.，1977，22(3)：311 - 351.

[7] 曹怀信，徐宗本. 非线性 Lipschitz - α 算子的若干性质[J]. 数学学报，2002，45(2)：279 - 286.

[8] 曹怀信，徐宗本. Lipschitz - 算子的 M - 谱理论[J]. 数学学报，2003，46(6)：1073 - 1078.

[9] 安芹力，井爱雯. 新迭代法的构造方法及应用[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2005，6（1）：87 - 90.

（编辑：田新华）

Nonlinear Lipschitz - α Operators among Metric Spaces

CHEN Guang - feng[1,2], CAO Huai - xin[2], ZHAO Yong - bin[3]

(1. Department of Mathematics, Xi'an University of Arts and Science, Xi'an 710065, Shaanxi, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China; 3. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, Shaanxi, China)

Abstract: This paper introduces nonlinear Lipschitz - α operators between two metric spaces and those between metric space and Banach space. The invertibility of these operators is discussed. Moreover, the perturbation theory of invertibility is proved.

Key words: metric space; Lipschitz - α operator; invertibility

（本卷终）