部分生成锥内部凸—锥—凸映射和向量优化问题

余国林1，　李炳杰2，　王国正2

(1. 西北第二民族学院信息与计算科学系，宁夏银川750021；2. 空军工程大学理学院，陕西西安710051)

摘要：在局部凸拓扑向量空间中引入部分生成锥内部凸—锥—凸映射的概念，建立了择一定理。在部分生成锥内部凸—锥—凸映射下，得到了既有等式约束又有不等式约束的向量优化问题弱有效解的最优性必要条件。

关键词：向量优化；部分生成锥内部凸—锥—凸；择一定理；弱有效解

中图分类号：O221　　文献标识码：A　文章编号：1009-3516(2006)05-0088-03

Yang[1]引进了近似锥-次类凸映射的概念并建立择一定理，推广了一些学者提出的广义锥凸性[2~5]。最近，SACH[6]引进了一种新的广义锥凸性的概念，称为生成锥内部凸-锥-凸映射。这种新的锥凸性进一步推广了Yang[1]引进的近似锥-次类凸性。一般在向量优化模型中，一些学者只考虑一种约束条件，即等式约束或不等式约束。但实际问题往往既有等式约束又有不等式约束。本文讨论既有等式约束又有不等式约束的向量优化模型，为此在生成锥内部凸-锥-凸映射概念的基础上本文引进部分生成锥内部凸-锥-凸映射的定义，并建立择一定理，得到了既有等式约束又有不等式约束的向量优化问题弱有效解的最优性必要条件。

1　生成锥内部凸-锥-凸映射

设Y为局部凸空间，$A\subset Y$为一非空子集。设$K\subset Y$为一非空凸锥，Y的拓扑对偶记为Y^*，K的对偶锥记为K^+。所有非负实数的全体记为R_+。

定义1[6]　A称为是内部凸的(简记为i-凸)，如果$\mathrm{int}A$是凸的并且$A\subset \mathrm{cl\ int}A$；$A$称为是生成锥内部凸的(简记为ic-凸)，如果$\mathrm{cone}A$是内部凸的；$A$称为是生成锥内部凸-$K$-凸的(简记为ic-$K$-凸)，如果$A+K$是生成锥内部凸的。

定义2　若凸锥$K=K_1\times K_2$，并且$\mathrm{int}K_1\neq\varnothing$。我们称$A$为部分生成锥内部凸-$K_1\times K_2$-凸的，如果$A+(\mathrm{int}K_1)\times K_2$是生成锥内部凸的。

定理1　设Y_1和Y_2为局部凸空间，$K_1\subset Y_1$和$K_2\subset Y_2$为非空凸锥，并且$\mathrm{int}K_1\neq\varnothing$。若非空子集$A\subset Y=Y_1\times Y_2$是部分生成锥内部凸-$K_1\times K_2$-凸的，并且$\mathrm{intcone}(A+(\mathrm{int}K_1)\times K_2)\neq\varnothing$。则下面系统：

Ⅰ) $0\in \mathrm{int\ cone}(A+(\mathrm{int}K_1)\times K_2)\}$

Ⅱ) $\exists\mu=(\mu_1,\mu_2)\in K_1^+\times K_2^+\backslash\{0.0\}$，$\forall a=(a_1,a_2)\in A$，$<\mu_1,a_1>+<\mu_2,a_2>\geqslant 0$

如果(Ⅰ)不成立则(Ⅱ)成立，并且当$\mu\neq 0$时，若(Ⅱ)成立则(Ⅰ)不成立。

证明　首先证明(Ⅰ)不成立则(Ⅱ)成立。事实上，如果$0\notin \mathrm{int\ cone}(A+(\mathrm{int}K_1)\times K_2)$，则由凸集分离定理，存在$\mu=(\mu_1,\mu_2)\in Y_1^*\times Y_2^*\backslash\{0,0\}$使得

$$<\mu,y>>0\ \forall y\in \mathrm{int\ cone}((\mathrm{int}K_1)\times K_2) \tag{1}$$

由此可得：$<\mu,y>>0\ \forall y\in \mathrm{int\ cone}((\mathrm{int}K_1)\times K_2)$。由于$A$是部分生成锥内部凸-$K_1\times K_2$-凸的，故有

收稿日期：2005-09-29
基金项目：陕西省科学研究项目(2004A05)；西北第二民族学院科学研究项目
作者简介：余国林(1974-)，男，宁夏银川人，讲师，博士生，主要从事优化理论及应用研究.

cone $(A+(\text{int}K_1\times K_2\subset \text{cl int cone}(A+(\text{int}K_1)\times K_2)$。由此推出,对任意的 $\alpha\geqslant 0(a_1,a_2)\in A,k_1\in \text{int}K_1,k_2$ $\in K_2$有$(\mu_1,\mu_2)(\alpha(a_1,a_2)+(k_1,k_2))\geqslant 0$ 。上式中令 $\alpha=0$,对任意的 $k_1\in \text{int}K_1,k_2\in K_2$,可得$(\mu_1,\mu_2)(k_1,$ $k_2)\geqslant 0$。特别地,取 $k_2=0$,就有 $<\mu_1,k_1>\geqslant 0$,对所有 $k_1\in \text{int}K_1$成立。容易证明$\mu_1\in K_1^+,\mu_2\in K_2^+$。另外用反证法容易得到,对任意的 $a=(a_1,a_2)\in A$, $<\mu_1,a_1>+<\mu_2,a_2>\geqslant 0$。

最后证明当$\mu\neq 0$ 时,若(Ⅱ)成立则(Ⅰ)不成立。事实上,若(Ⅱ)成立并且 $0\in \text{int cone}(A+(\text{int}K_1)\times$ $K_2)$ 。由于 $\text{int cone}(A+(\text{int}K_1)\times K_2)$ 为开集,故存在$(0_{Y_1},0_{Y_2})$ 的邻域 $U_{Y_1}\times U_{Y_2}$使得 $U_{Y_1}\times U_{Y_2}\subset \text{cone}(A+$ $(\text{int}K_1)\times K_2)$ 。因为对任意的$(k_1,k_2)\in(\text{int}K_1)\times K_2)$ 有 $<(\mu_1,\mu_2),(y_1,y_2)>\geqslant 0$,所以由假设可得

$$\langle(\mu_1,\mu_2),(y_1,y_2)\rangle\geqslant 0,\ \forall(y_1,y_2)\in \text{cone}(A(\text{int}K_1)\times K_2)\tag{2}$$

故而有$\langle(\mu_1,\mu_2),(y_1,y_2)\rangle\geqslant 0$, $\forall(y_1,y_2)\in Y_{Y_1}\times U_{Y_2}$。式(2)只有在$(\mu_1,\mu_2)=(0,0)$,这与假设矛盾。

2　弱有效解的最优性必要条件

令 X,Y,Z_1,Z_2为局部凸拓扑空间, K,M_1 和 M_2分别为 Y,Z_1和 Z_2中的非空凸锥。用$L(Z_1\times Z_2,Y)$ 表示从 $Z_1\times Z_2$ 到 Y 的连续线性算子的全体,并且记 $L^+=\{T\in L(Z_1\times Z_2,Y):T(M_1\times M_2)\subset K\}$。设$f:X\to Y$, $g_1:X\to Z$ 和 $g_2:X\to Z_1$为 3 个映射,考虑下面约束向量优化问题:

$(P)K-\min\{f(x):x\in X,g_1(x)\in -M_1,g_2(x)\in -M_2\}$,记(P) 的可行集为 $\Omega=\{x\in X:g_1(x)\in g_2(x)$ $\in -M_2\}$ 。

定义 3　设 $\text{int}K\neq\varnothing$。映射$(f,g_1,g_2)$ 在 X 上称为关于锥 $(K\times M_1,M_2)$是部分生成锥内部凸 $-(K\times$ $M_1,M_2)$ $-$凸的,如果$(f,g_1,g_2)(X)$ 是$(K\times M_1,M_2)$是部分生成锥内部凸 $-$ $(K\times M_1,M_2)$ $-$凸集。

定义 3[6]称(P) 满足条件(CQ) ,如果 $\text{cl cone}[g_1(X)\times g_2(X)+M_1\times M_2]=Z_1\times Z_2$。

定理 2　令 K,M_1,M_2 为非空凸锥且满足 $\text{int}K\neq\varnothing$和 $\text{int}M_1\neq\varnothing$ 。设 $Z=Z_1\times Z_2$,并且 $x_0\in X$ 为问题(P)的一个弱有效解。如果$(f(x)-f(x_0),g_1(x),g_2(x))$ 是部分生成锥内部凸 $-$ $(K\times M_1,M_2)$ $-$凸的,并且满足 $\text{int cone}[(f(X)-f(x_0),g_1(X),g_2(X))+\text{int}(K\times M_1)\times,M_2]\neq\varnothing$。则有

1)存在$(\mu_k,\mu_1,\mu_2)\in K^+\times M_1{}^+\times M_1{}^+/\{0,0,0\}$ 使得

$$\langle\mu_K,(f(x)\rangle+\langle\mu_1,g_1(x)\rangle+\langle\mu_2,g_2(x)\rangle\geqslant\langle\mu_K,f(x_0)\rangle 0,\ \forall x\in X\tag{3}$$

$$\langle\mu_1,g_1(x_0)\rangle+\langle\mu_2,g_2(x)\rangle=0\tag{4}$$

2)如果条件(CQ) 满足,则存在$(\mu_k,\mu_1,\mu_2)\in K^+\times M_1{}^+\times M_1{}^+$使得$\mu_K\neq 0$ 并且式(3) ,(4)成立。

3)如果条件(CQ) 满足,则存在 $T_0\in L^+$使得 x_0是下面无约束优化问题:

$(P')K-\min\{f(x)+T_0(g_1(x),g_2(x)):x\in X\}$ 的弱有效解,并且 $T_0(g_1(x_0),g_2(x_0))=0$ 。

证明　1)由假设 $K\times M_1\times M_2$是凸锥且 $\text{int}(K)\times M_1\neq\varnothing$。如果 $x_0\in X$ 是问题(P) 的弱有效解,则不存在 $x\in X$ 使得$(f(x)-f(x_0),g_1(x),g_2(x))\in(-\text{int}K)\times(-M_1)\times(-M_2)$ 。令 $H(x)=(f(x)-f(x_0),g_1$ $(x),g_2(x))$ 。则有$(0,0,0)\notin \text{intcone}(H(X)+\text{int}(K)\times M_1\times M_2)$ 。由定理 1,存在$\mu=(\mu_k,\mu_1,\mu_2)\in K^+$ $\times M_1{}^+\times M_1{}^+/\{0,0,0\}$使得$\langle\mu,(f(x)-f(x_0),g_1(x),g_2(x))\rangle\geqslant 0$, $\forall x\in X$。故对所有的 $x\in X$ 有$\langle\mu_K,(f$ $(x)\rangle+\langle\mu_1,g_1(x)\rangle+\langle\mu_2,g_2(x)\rangle\geqslant\langle\mu_K,f(x_0)\rangle 0$ 。在上式中令 $x=x_0$,可得$\langle\mu_1,g_1(x_0)\rangle+\langle\mu_2,g_2(x_0)\rangle\geqslant$ 0,但是因为 $x_0\in\Omega$,故必有

$$\langle\mu_1,g_1(x_0)\rangle+\langle\mu_2,g_2(x_0)\rangle=0。$$

2)令$\mu'=(\mu_1,\mu_2)$ 。若 $\text{cl cone}[g_1(X)\times g_2(X)+M_1\times M_2]=Z_1\times Z_2$,则必有$\mu_k\neq 0$ 。事实上,若$\mu_K=$ 0,用反证法可得这与$(\mu_K,\mu_1,\mu_2)\neq(0,0,0)$ 矛盾。

3)假设(μ_K,μ_1,μ_2)满足结论(2)。由于$\mu_K\in K^+\setminus\{0\}$,故必存在 $k_1\in \text{int}K$ 使得$\langle\mu_1,k_1\rangle>0$。令 $y_1=k_1/$ $\langle\mu_1,k_1\rangle\in K$,构造线性映射如下:$h:R\to Y,h(r)=r\cdot y_1,r\in R$ 。显然当$r\geqslant 0$ 时, $h(r)\in K$ 并且$\mu_K(h(r))=$ $r\langle\mu_K,y_1\rangle=r$,这说明$\mu_1{}^\circ h$ 为单位映射。令 $T_0:Z_1\times Z_2\to Y,T_0=h^\circ(\mu_1,\mu_2)$ 。则对任意的$(m_1,m_2)\in M_1\times$ M_2有

$$T_0(m_1,m_2)=h(\langle(\mu_1,\mu_2),(m_1,m_2)\rangle)\in h(R_+)\subset K。$$

由此推出 $T_0\in L^+$。另外注意到$\mu_K{}^\circ T_0=\mu_K{}^\circ h^\circ(\mu_1,\mu_2)$,于是

$$\langle\mu_K,(f(x)\rangle+\langle\mu_1,g_1(x)\rangle+\langle\mu_2,g_2(x)\rangle=\langle\mu_K,(f(x)+T_0(g_1(x),g_2(x))\rangle。$$

再由定理 2,进而可得$\langle \mu_K,(f(x)+T_0(g_1(x),g_2(x)))\rangle \geqslant \langle \mu_K,(f(x)+T_0(g_1(x),g_2(x)))\rangle$。事实上,上式等价于说明$x_0$是问题$(P')$的弱有效解。最后,由$\langle \mu_1,g_1(x_0)\rangle+\langle \mu_2,g_2(x_0)\rangle$可得到$T_0(g_1(x_0),g_2(x_0))=0$。

参考文献:

[1] Yang X M D, Wang L I S Y, Nearly - subconvexlikeness in Vector Optimization with Set - Valued Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(2): 413 - 427.

[2] Jeyakumar V. Convexlike Alternative Theorems and Mathematical Programming[J]. Optimization, 1985, 16: 643 - 652..

[3] Kim D S, Lee G M, Sach P H. Hartley Proper Efficiency in Multifunction Optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 120(1): 129 - 145.

[4] Li Z. Theorem of the Alternative and Its Application to the Optimization of Set - Valued Maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 100(2): 365 - 375.

[5] 梁晓龙,李炳杰,杨 源. 具有下层目标的多组线性二次微分对策的非劣 Nash 开环策略[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2006, 7(1): 87 - 91.

[6] Sach P H. New Generalized Convexity Notiton for Set - Valued Maps and Application to Vector Optimization Problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 125(1): 157 - 179.

(编辑:田新华)

Partial ic -cone - convexlike Maps in Vector Optimization Problems

YU Guo - lin1, LI Bing - jie2, WANG Guo - zheng2

(1. Dept. of Inf & Corn Sci, the Second Northwest Institute for Ethnic Minorities, Yinchuan, Ningxia 750021, China; 2. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: This paper introduces the concept of Partial ic - cone - convexlike Maps in local convex topology spaces, and establishes a Partial Alternative theorem. Under the conditions of Partial ic - convexlike Maps, optimality necessary conditions of weak efficient solutions for vector optimization problems with equality and inequality constraints are obtained.

Key words: vector optimization ; partial ic - cone - convex; alternative theorem : weak efficient solution