

含导体边界的等离子体空间二维静电场 PIC算法

王甲富, 屈马林, 屈绍波, 王斌科

(空军工程大学理学院, 陕西西安 710051)

摘要: 讨论了有界等离子体区域含待定边界条件导体时, 二维准静电场方程与边界条件的耦合问题。通过典型问题的具体分析, 提出处理这种边界条件的 PIC算法。将其用于气体放电等离子体吸波管的数值模型, 给出空间电势的正确分布。研究结果对丰富 PIC粒子模拟程序的应用具有重要的意义。

关键词: PIC粒子模拟; 待定边界条件导体; 气体放电吸波管

中图分类号: O53 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2006)05-0060-03

随着计算机技术的不断发展, 粒子模拟方法在等离子体理论和应用研究中, 发挥着越来越多的作用, 广泛地应用于激光技术、气体放电、热核反应、光电器件、飞行器隐身^[1]等许多领域的研究工作, 成为新理论的创立、新器件研究与开发强有力的工具。实践中, 复杂边界问题的应用, 一直是这一领域关键技术难点之一。目前国际上常用的 PIC 粒子模拟程序, 如 MAGIC、KARAT、XOOPIC 等^[2], 尚无对含待定边界条件导体这类问题的考虑, 应用上具有很大的局限性。本文正是针对这类边界问题, 提出一种有效的处理方法。

1 准静电场方程的差分格式

在 PIC 粒子模拟程序中, 空间区域可以包含等离子体、多种介质、导体及各种边界。在等离子体的准静电模型中, 电势 ϕ 满足 Poisson 方程^[3], 其形式为

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) + \rho = 0, \quad \rho = \begin{cases} 0 & (\text{介质区域}) \\ (n_i - n_e)e & (\text{等离子体区域}) \end{cases} \quad (1)$$

式中 e 为电子电量, n_e, n_i 分别为电子和正离子密度。在二维 Yee 空间网格情况下, 将上述方程离散化, 得 $\phi_{i,j}$ 的空间 5 点差分格式为

$$\phi_{i,j} = a_{xi,j} \phi_{i-1,j} + c_{xi,j} \phi_{i+1,j} + a_{yi,j} \phi_{i,j-1} + c_{yi,j} \phi_{i,j+1} + r_{i,j} \rho_{i,j} \quad (2)$$

其中 $a_{xi,j}, c_{xi,j}, a_{yi,j}, c_{yi,j}$ 为电势系数, $r_{i,j}$ 为源系数, 均由空间几何结构及介质的物理性质确定, 其形式容易推导^[4], 此处不一一列举。这里重点讨论导体边界与式(2)的耦合问题。

2 待定边界条件导体的应用

式(2)需给定边界条件才能构成柯西问题。对于第一类导体边界和第二类导体边界问题, 有关文献中已有详细介绍^[5], 此处仅讨论一种特殊的含待定边界条件的导体边界问题。这种边值问题包括位于边界上的浮地导体和位于等离子体内部的导体区域两种情况, 其共同特点是导体的电位和表面电荷依赖于周围电场的性质, 须附加其它物理条件来确定, 下面给出其数值形式。

2.1 边界浮地导体

收稿日期: 2006-01-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471040)

作者简介: 王甲富(1981-), 男, 山东聊城人, 硕士生, 主要从事等离子体技术及等离子体隐身研究;
屈马林(1956-), 男, 陕西合阳人, 教授, 主要从事激光技术、红外技术及等离子体技术研究。

设 $i = l$ 为区域边界,导体的位置由 $(i, j | i \geq l, k \geq j \geq l)$ 决定。这种处于区域边界上的非电极导体,称为浮地导体。考虑到 $E^x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_{l+1/2, j}^x = 0 (k \geq j \geq l)$, 得边界电势所满足的关系

$$\varepsilon_{l-1/2, j}(\varphi_{l-1, j} - \varphi_{l, j}) = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \rho_{l, j} + \Delta x \sigma_{l, j}, (k \geq j \geq l) \quad (3)$$

式中, $\sigma_{l, j}$ 为导体表面电荷密度,由感应电荷面密度 $\varphi_{l, j}^I$ 和运流电荷面密度 $\varphi_{l, j}^T$ 两部分的代数和确定。设导体电势 $\varphi_{l, j} = \varphi_0 (k \geq j \geq l)$, 式(3)对 $i = l, k \geq j \geq l$ 的所有网格点求和,注意感应电荷的代数和为零,得浮地导体电势

$$\varphi_0 = \frac{\sum_{j=k}^l \varepsilon_{l-1/2, j} \varphi_{l-1, j} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \sum_{j=k}^l \rho_{l, j} + \Delta x \sum_{j=k}^l \sigma_{l, j}^T}{\left(\sum_{j=k}^l \varepsilon_{l-1/2, j} \right)} \quad (4)$$

此式是电荷守恒定律对边界导体的具体应用,说明导体的电势由导体表面运流电荷密度及附近点的电势和电荷分布确定。

2.2 区域内部导体

图1为等离子体内部存在导体区域的简单模型,设导体区域为 $\{(i, j) | m \leq i \leq n, k \leq j \leq l\}$, 图中1、2、...、16为其边界网格点,1、5、9、13为4个角点。导体电势 φ_0 为待定,表面电荷密度 $\sigma_{i, j}$ 未知。应用 Gauss 定理,可推导其表面附近各网格点上的电势、电荷密度之间的关系。为简单计,这里仅给出推导边线网格点15和角点9所得结果,分别有形式

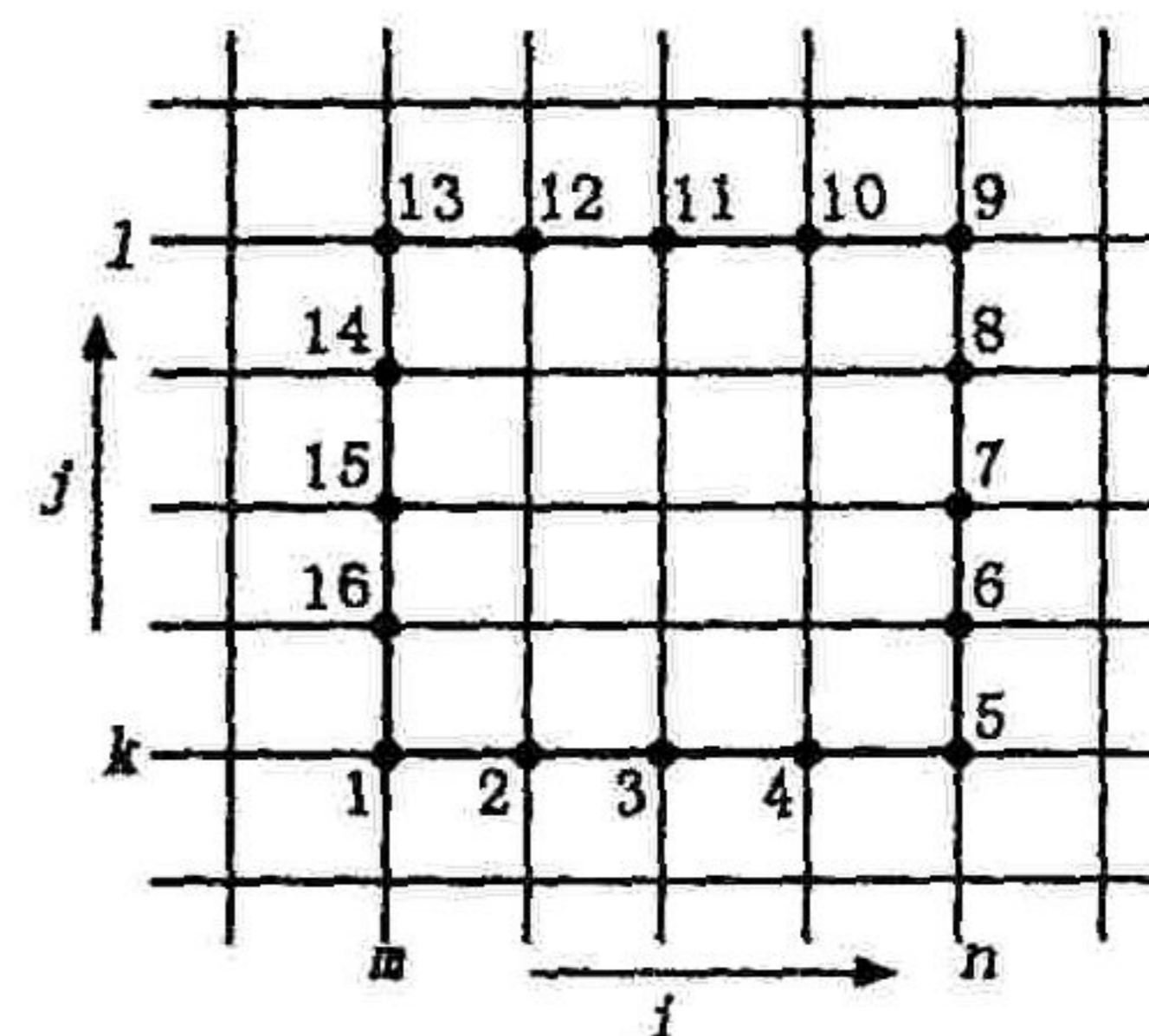


图1 内部导体的边界条件

$$\varepsilon_{m-1/2, j} \varphi_0 = \varepsilon_{m-1/2, j} \varphi_{m-1, j} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \rho_{m, j} + \Delta x \sigma_{m, j} \quad (5)$$

$$\left[\frac{2}{(\Delta x)^2} \varepsilon_{n+1/2, l} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \varepsilon_{n, l+1/2} \right] \varphi_0 = \frac{2}{(\Delta y)^2} \varepsilon_{n, l+1/2, l} \varphi_{n+1, l} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \varepsilon_{n, l+1/2} \varphi_{n, l+1} + 3\rho_{n, l} + \frac{2(\Delta x + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} \sigma_{n, l} \quad (6)$$

对导体区域的所有边界点的关系式求和后,整理得

$$\varphi_0 = (\psi + \zeta) / \xi \quad (7)$$

$$\xi = \frac{2}{(\Delta x)^2} \sum_{j=k}^l (\varepsilon_{m-1/2, j} + \varepsilon_{n+1/2, j}) + \frac{2}{(\Delta x)^2} \sum_{i=m}^n (\varepsilon_{i, k-1/2, j} + \varepsilon_{i, l+1/2}) \quad (8)$$

$$\psi = \frac{2}{(\Delta x)^2} \sum_{j=k}^l (\varepsilon_{m-1/2, j} \varphi_{m-1, j} + \varepsilon_{n+1/2, j} \varphi_{n+1, j}) + \frac{2}{(\Delta x)^2} \sum_{i=m}^n (\varepsilon_{i, k-1/2, j} \varphi_{i, k-1} + \varepsilon_{i, l+1/2} \varphi_{i, l+1}) \quad (9)$$

$$\zeta = \sum_{j=k}^l (\rho_{m, j} + \rho_{n, j}) + \sum_{i=m}^n (\rho_{i, k} + \rho_{i, l}) + (\rho_{m, k} + \rho_{m, l} + \rho_{n, k} + \rho_{n, l}) + \frac{2}{\Delta x} \sum_{j=k}^l (\rho_{m, j} + \rho_{n, j}) + \frac{2}{\Delta y} \sum_{i=m}^n (\sigma_{i, k} + \sigma_{i, l}) \quad (10)$$

上述结果表明,导体的电势由表面电荷面密度、周围邻近网格点的电势和电荷分布共同确定。实际系统所包含的待定边界条件导体结构复杂多样,有时还需附加等离子体的准电中性、整个区域电荷守恒甚至外电路条件来处理,其耦合方程的推导大致相同。

当区域含有待定边界条件导体时,确定系统电位的线性无关方程数会相应减少,方程减少的数目与导体所占网格点的总数相等。这说明扩充这种边界条件不影响程序的效率。将区域内点所满足的式(2)与式(3)、式(4)耦合,可构成线性独立的代数方程组,唯一地确定系统的电势分布。

3 气体放电吸波管模型准静电场方程的数值求解

图2为气体放电等离子体吸波管的几何结构示意图。 ε 表示放电管的玻璃壁,其相对介电常数为 $\varepsilon_r = 4.5$, A, K 分别为系统的电极, P 为等离子体区域, CD 为外部导体边界。取图中矩形网格区域为模型数值空间,其右边界即为上述待定边界条件导体,设两电极为第一类导体边界,分别给定电位 $U_1 = 250 \text{ V}, U_2 = 0 \text{ V}$ 。

图3给出所给模型不计内部导体时计算空间电势 φ 的数值结果。结果表明,导体表面电势处处相等,

其数值介于两电极的电势之间,它的存在,使附近场分布呈现出均匀性。图4为域添加内部矩形导体S时,计算空间电势 φ 所得数值结果。图4说明,内部导体的存在使阳极附近等位线进一步密集,其电势变化较阴极附近进一步增大;电势变化最大的区域出现在电极和边界导体之间。

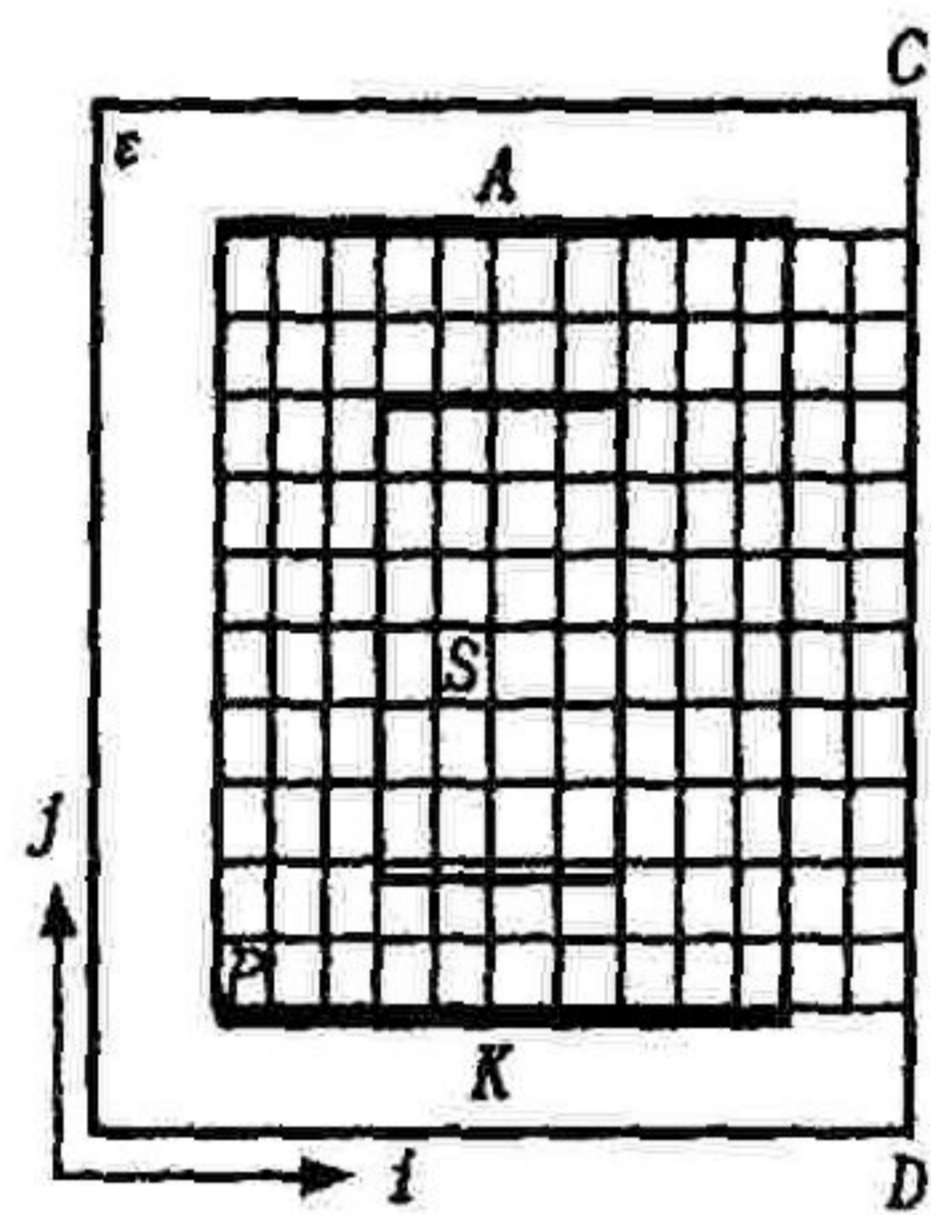


图2 气体放电吸波管模型

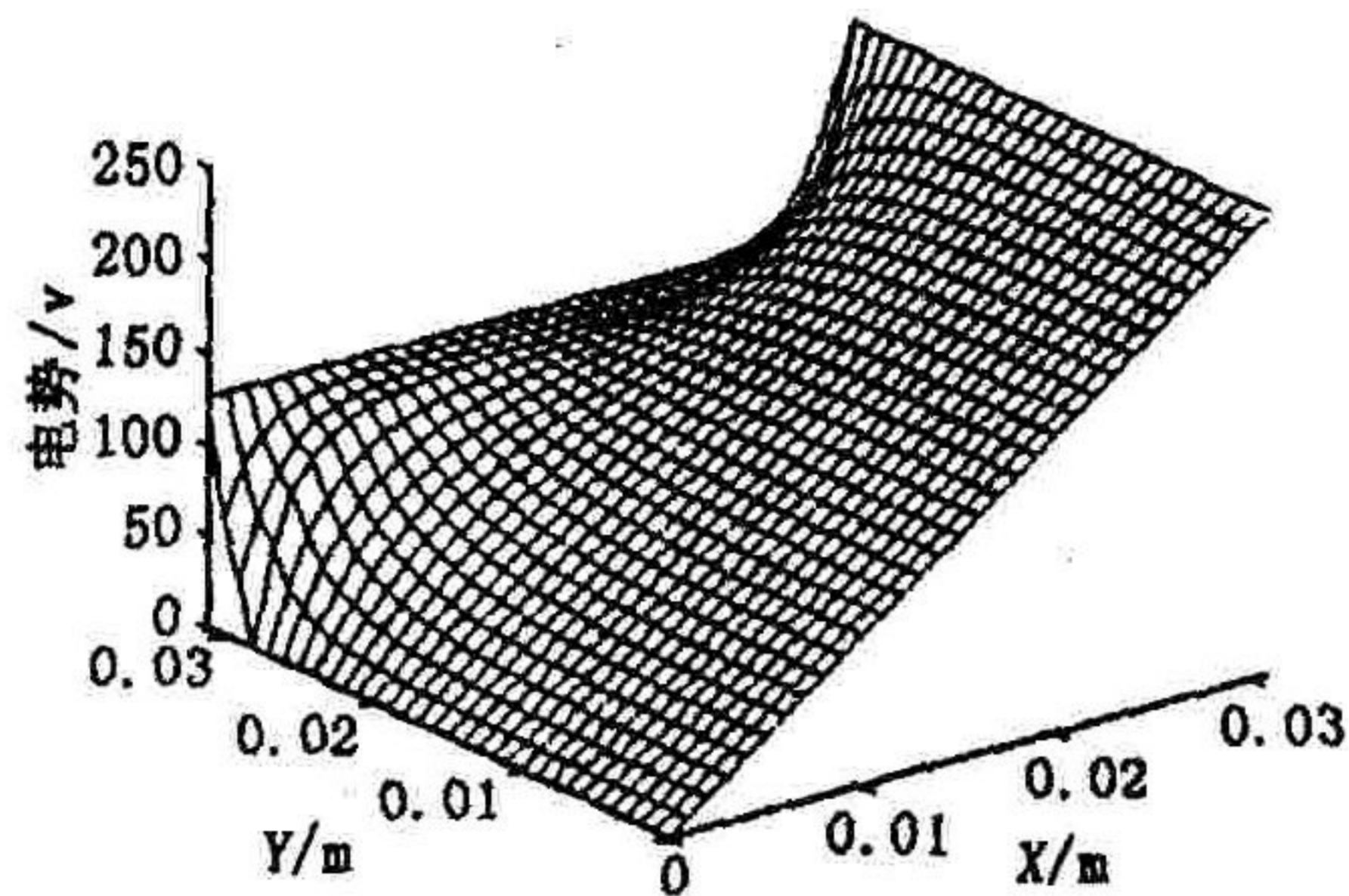


图3 仅存在边界浮地导体时的电势分布

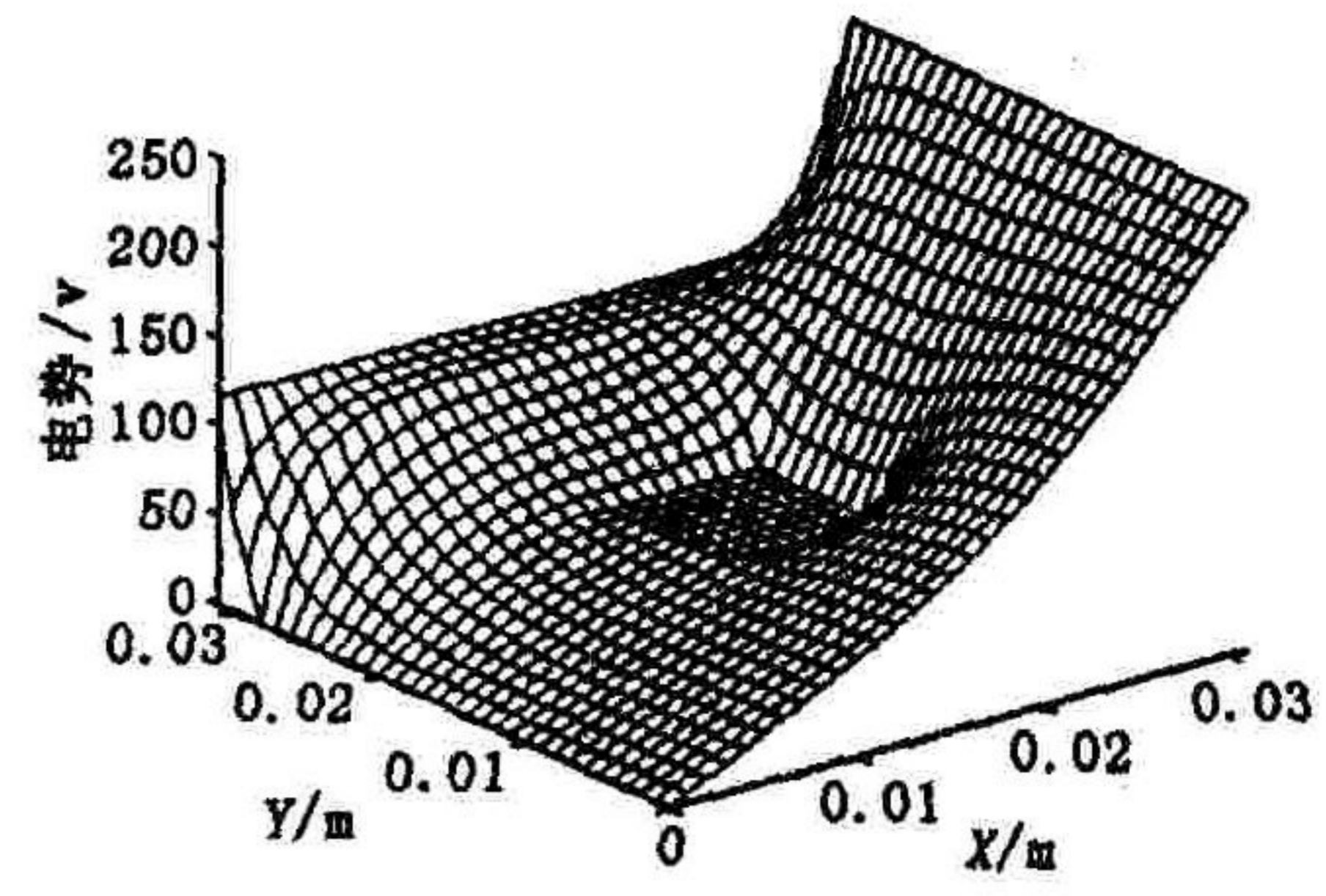


图4 添加内部导体时的电势分布

分析表明,导体内部场强处处为零,导体是等势体,即导体的静电平衡性质得以很好地满足;在远离导体区域,场分布与均匀场趋于一致,说明计算结果是完全正确的。

4 结论

在有界等离子体区域存在含有待定边界条件导体结构时,其准静电场方程与边界的耦合可以通过附加电荷守恒定律或其它物理条件解决。待定边界条件导体的存在,不降低程序运行的效率。本文所研究的算法可用于对含待定边界条件导体的气体放电等离子体吸波管 PIC 粒子模拟程序的扩充,其模拟结果容后报道。

参考文献:

- [1] 凌永顺. 等离子体隐身及其应用于飞机的可能性[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2000, 1(2): 1-3.
- [2] Verboncoeur J P. Particle Simulation of Plasmas; review and advances [J]. IOP Plasma Physics and Controlled Fusion, 2005, 47, 231-260.
- [3] John David Jackson. 经典电动力学(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2001.
- [4] Qu Malin, Wang Binke, Wang Feng. A Two Dimensional Fast CIC Algorithm for Solving Electrostatic Field Equations with Bounded Plasma Space [A]. Proc Int Symp Test Meas [C]. ShenZhen: International Academic Publisher, 2003, 2: 1757-1760.
- [5] 邓建中,刘之行. 计算方法(第二版)[M]. 西安:西安交通大学出版社, 2000.

(编辑:田新华)

A Two- Dimensional Pic Algorithm for Numerical Solutions of Potential in

Plasma Region With Undecided Conductor Boundary Conditions

WANG Jia - fu, QU Ma - lin, QU Shao - bo, WANG Bin - ke

(The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, 710051, China)

Abstract: In this paper, the two - dimensional numerical solutions of the electrostatic fields in plasma region with undecided conductor boundary conditions are discussed. Methods of processing such boundary conditions including conductor within plasma or at the boundary are considered. On the basis of this work, the potentials in a gas discharge absorption unit fixed on a conductor surface of an object is obtained. The method can be used in PIC particle simulation code to enrich its application in solving such boundary problems.

Keywords :PIC method; undecided conductor boundary; gas discharge absorption unit