

基于多径瑞利衰落信道的非规则 LDPC 码分析性能

吴晓丽^{1,2}, 葛建华¹, 岳安军¹

(1. 西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室, 陕西 西安 710071; 2. 空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

摘要:分析了在静态多径瑞利衰落信道上应用于正交频分复用技术的非规则 LDPC 码在相同的调制方式, 不同的映射模式下的误码性能, 并与规则 LDPC 码的性能作了比较, 结果显示, 在静态多径瑞利衰落信道上, 不同的映射模式下, 非规则 LDPC 码的误码性能均优于规则 LDPC 码的误码性能, 非规则 LDPC 码在相同的调制方式下, 格雷映射的误码性能优于自然映射的误码性能。

关键词:规则 LDPC 码; 非规则 LDPC 码; 正交频分复用; 和-积算法

中图分类号: TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2006)04-0047-05

未来移动通信系统需要高速、高质量的传输。为了在不牺牲带宽的条件下实现高速, 必须将高阶调制与正交频分复用(OFDM)技术相结合, 由于多径衰落信道引起的符号间干扰可以采用增加一个导频间隔来克服, 因此正交频分复用技术是实现高速传输的关键。然而, 在多径衰落信道, 正交频分复用的一些子载波由于深衰落可能完全丢失, 必将引起误码率的急剧增大, 信息质量急剧下降, 为此, 正交频分复用(OFDM)技术又必须与纠错码技术相结合才能真正发挥作用。已经有许多的编码技术应用到正交频分复用技术, 如卷积码^[1]、RS 码^[2]、Turbo 码^[3]等等。1962年由格列提出的 LDPC 码^[4], 由于其性能接近香农限, 也被应用于正交频分复用技术中。LDPC 码分规则和不规则两种, 在白噪声信道, 不规则 LDPC 码的性能优于规则 LDPC 码^[5]。本文在分析了静态多径瑞利衰落信道上应用于正交频分复用技术的非规则 LDPC 码在相同的调制方式, 不同的映射模式下的误码性能, 并与规则 LDPC 码的性能作了比较, 结果显示, 在静态多径瑞利衰落信道上, 不同的映射模式下, 非规则 LDPC 码的误码性能均优于规则 LDPC 码的误码性能, 非规则 LDPC 码在相同的调制方式下, 格雷映射的误码性能优于自然映射的误码性能。

1 系统模型

系统模型如图 1 所示。

在发送端, 随机产生的块长为 k 位的信息数据进入到一个码率为 k/n 的 LDPC 编码器, 编码器输出的 n 位码字, 经过不同的星座映射模式(QPSK)映射成长度为 $n/\log_2 |\Omega|$ 的复信号, 经过串并变换变成长度为 $n/N_s \log_2 |\Omega|$ 的 N_s 组数据进行 N_s 点的 OFDM 调制(IFFT)。在接收端, 受多径瑞利衰落和白噪声干扰的 OFDM 调制信号经过 OFDM 解调(FFT), 送入解映射, 用软解调算法得到码字的似然比值送入 LDPC 解码器, LDPC 解码器利用对数域的和-积算法(Sum-Product Algorithm)得到发送的信息数据。

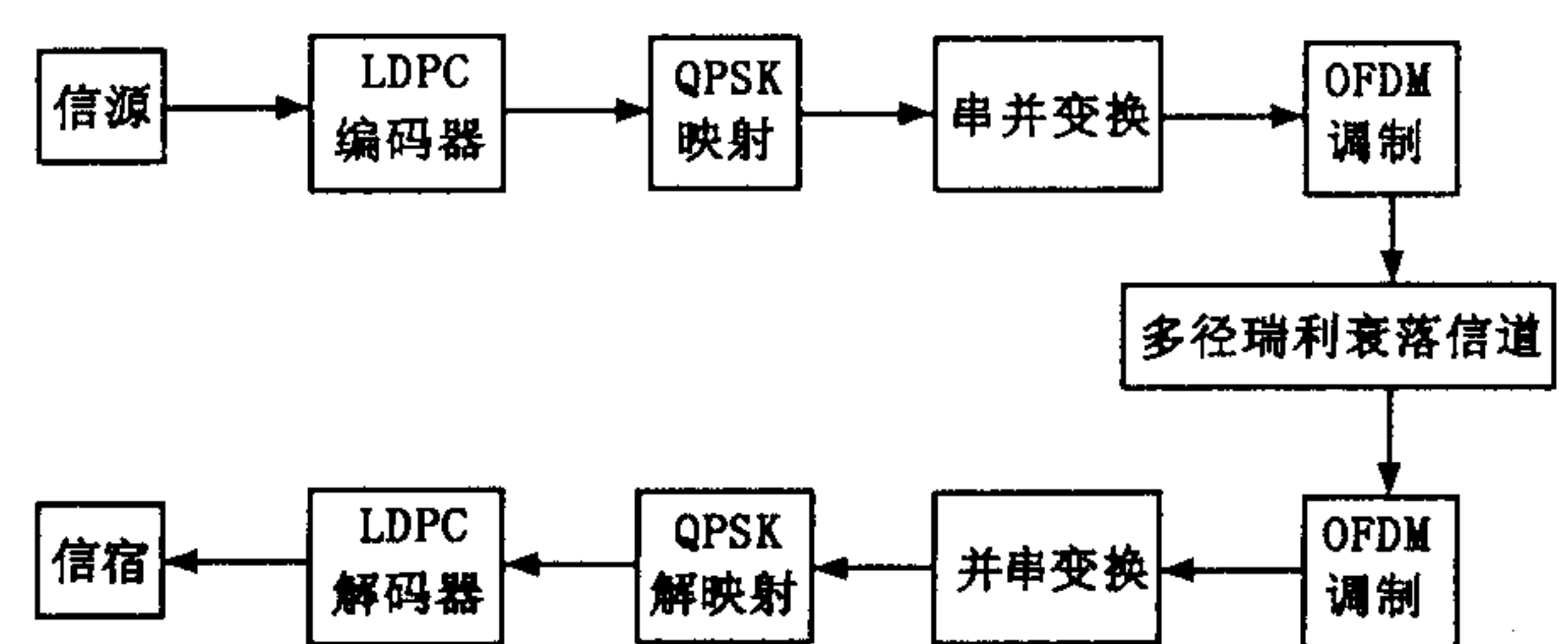


图 1 系统模型图

1.1 LDPC 码

LDPC 码是一种线性码, 其校验矩阵 H 是一个非常稀疏的矩阵, H 矩阵的行对应于码字, 列对应于校验

收稿日期: 2005-12-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60332030, 60496316)

作者简介: 吴晓丽(1964-), 女, 陕西铜川人, 博士生, 主要从事信道编码研究;

葛建华(1961-), 男, 江苏南通人, 教授, 博士生导师, 主要从事数字通信研究。

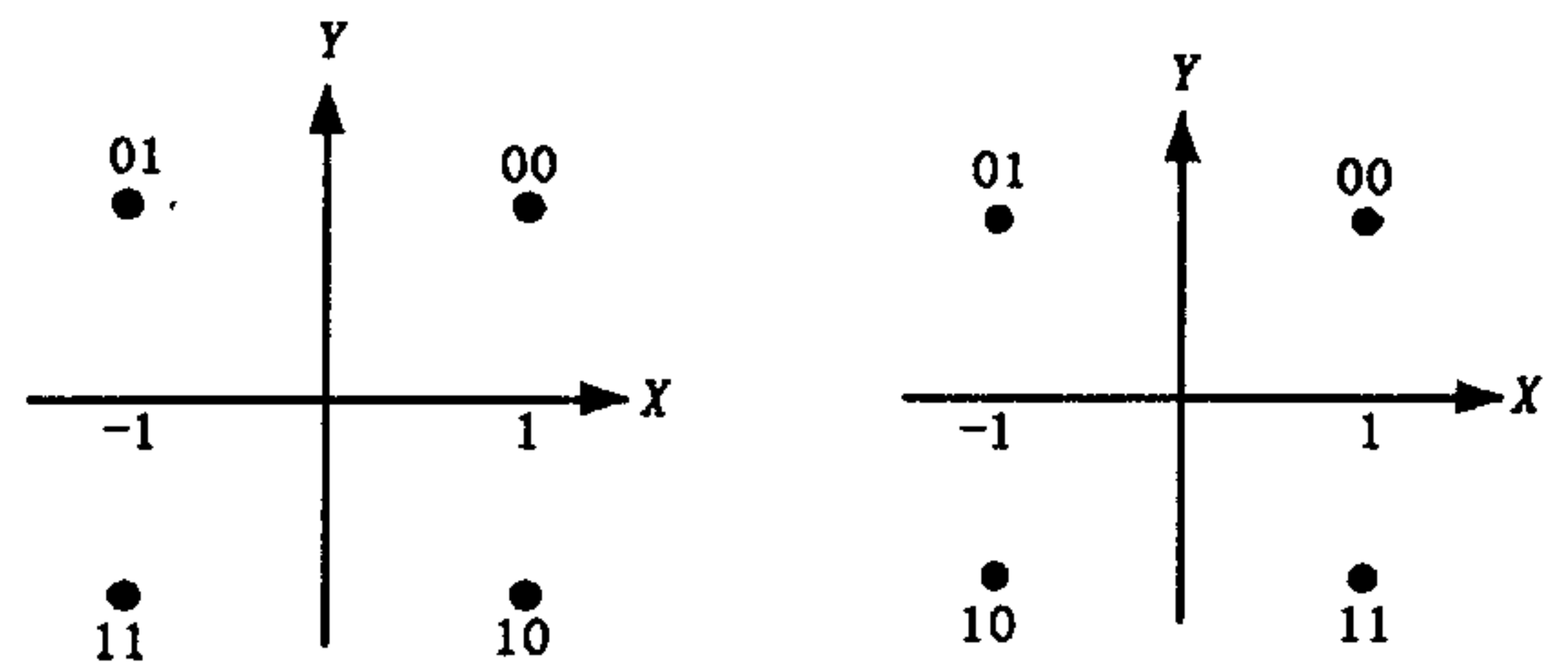
位,每行中 1 的个数称为行重,每列中 1 的个数称为列重,若 H 矩阵中每行的行重相同,每列的列重相同,称为规则 LDPC 码,否则称为非规则 LDPC 码。 H 矩阵也可以用双子图(Tanner 图^[6])来描述,Tanner 图有两类顶点,分别为变量节点和校验节点。Tanner 图就是这两类顶点之间的二部图,即每条边的一端跟变量节点相连,另一端与校验节点相连。变量节点代表实际的变量,校验节点代表这些变量节点之间的约束。一个 (n, k, s, t) 的规则 LDPC 码,表示有 n 个变量节点、 $n - k$ 个校验节点,每个变量都受 s 个校验节点的约束,因此每个变量节点应该连接 s 个校验节点。每个校验方程有 t 个变量,因此每个校验节点应与 t 个变量节点相连。Tanner 图中从一个节点经过不同的边返回相同的节点称为环,环数是指所经过的边的个数。环数越大,译码性能越好^[7]。除了图形描述之外,LDPC 码还可以用度分配对 $\lambda(x) = \sum_{p=1}^{d_v \max - 1} \lambda_p x^{p-1}$ 和 $\rho(x) = \sum_{q=1}^{d_c \max - 1} \rho_q x^{q-1}$ 描述,其中 λ_p 表示连到变量点的边数与总的边数之比, ρ_q 表示连到校验点的边数与总的边数之比, $d_{v \max}$ 表示连到变量点的最大边数, $d_{c \max}$ 连到校验点的最大边数。在给定码长和码率的条件下,LDPC 码的性能完全由矩阵来决定,有各种不同的方式构造矩阵^[8-10]。LDPC 码要获得好的译码性能, Tanner 图中环的长度必须尽可能的长,长度为 4 的环会降低译码性能。随机构造的 LDPC 码不能保证没有长度为 4 的环,PEG 算法^[11]构造的 LDPC 码的可以去掉环为 4 的圈。LDPC 码的译码采用对数域的和 - 积算法(Log - Sum - Product Algorithm^[4,6]),对数域的和 - 积算法可以将迭代过程中存在大量的乘的运算转换成加的运算,从而降低硬件复杂度及生产成本。

1.2 信息发送

LDPC 编码器输出的码字先进行映射,对于 QPSK 调制,有两种不同的映射模式,格雷映射和自然映射(星座图如图 2 所示)。假定在 k 时刻, m 位信息 $\{u_{k,i}\}$, $i \in (1, \dots, m)$ 映射成一个复信号 $s_k^j, j \in (1, \dots, M)$, 输出复信号可以表示成:

$$C(k) = s_k^j = A_k^j + iB_k^j \quad (1)$$

其中, m 表示映射一个星座点所需要的比特位数; M 表示星座点数(QPSK : $m = 2, M = 4$); A_k^j, B_k^j 分别表示星座点的实部和虚部。



(a) 格雷映射 (b) 自然映射

图 2 星座图

设 OFDM 调制的子载波数为 N_s ,映射输出的复信号经过串并变换被分成若干个数据块,每一块包括 N_s 个数据,经过 OFDM 调制后,输出信号可以表示成:

$$Z(t) = \sum_{m=1}^{N_s-1} C(k) e^{2\pi j(m-N_s/2)t/T_s} \quad (2)$$

式中, T_s 表示映射信号的持续期。这个表达式相当于一个反傅立叶变换,因此,OFDM 调制可以用反傅立叶变换来完成。同样,OFDM 调制的解调相当于一个傅立叶变换,因此,OFDM 解调可以用傅立叶变换来完成。为了克服符号间干扰,在 OFDM 调制之后,必须加上循环前缀。

多径瑞利衰落信道的冲击响应可以表示为

$$h(t) = \sum_{i=1}^L \alpha_i e^{j\phi_i(t)} \delta_i(t - \tau_i) \quad (3)$$

式中, L 表示多径个数; α_i 表示第 i 条路径的衰落幅度,服从瑞利分布,概率密度为

$$\rho(a) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \quad \sigma^2 \text{ 表示方差。} \quad (4)$$

τ_i 表示第 i 条路径的延时,服从均匀分布,概率密度为

$$\rho(\tau_i) = \frac{1}{2\pi}, \quad \tau_i \in [0, 2\pi]$$

经过多径瑞利衰落信道后,接收信号可以表示为

$$r(t) = \sum_{i=1}^L z(t - \tau_i(t)) h(\tau_i(t)) e^{j\phi(\tau_i(t))} + n(t) \quad (5)$$

$n(t)$ 表示服从均值为 0, 方差为 σ^2 高斯分布的白噪声。其概率密度为

$$\rho(n = \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$$

1.3 信息接收

接收信号去循环前缀之后经过 OFDM 解调, 可以表示为

$$R(k) = x_k + iy_k = H(k)C(k) + N(k) = H(k)s_k^j + N(k) \quad (6)$$

$P(k)$ 表示接收信号的频率响应, $H(k) = H_{re}(k) + H_{im}(k)$ 表示多径瑞利衰落信道的频率响应。

利用最大似然译码规则, 若 $|R(k) - H(k)s_k^p| < |R(k) - H(k)s_k^j|$, $\forall s_k^j \in \Omega, s_k^j \neq s_k^p$ 则判决发送的复信息是 s_k^p , 即求 $P(s_k^j/R(k))$ 最大。

$$\text{由贝叶斯公式可得: } P(s_k^j/R(k)) = \frac{P(R(k)/s_k^j)P(s_k^j)}{P(R(k))} \quad (7)$$

在此, $P(R(k)/s_k^j)$ 表示发送 s_k^j 条件下的条件概率, $P(s_k^j)$ 表示发送 s_k^j 的先验概率, 一般发送信息等概, 则:

$$P(s_k^j) = 1/M \quad (8)$$

由后验概率公式可得发送每一比特的对数似然比:

$$L(u_{k,i}) = \log \frac{P(u_{k,i} = 1/R(k))}{P(u_{k,i} = 0/R(k))} = \log \frac{\sum_{u_{k,i}=1} P(s_k^j/R(k))}{\sum_{u_{k,i}=0} P(s_k^j/R(k))} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, M \end{cases} \quad (9)$$

将式(7)、式(8) 带入式(9) 可得:

$$\begin{aligned} L(u_{k,i}) &= \log \frac{\sum_{u_{k,i}=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_N^2}} \exp\left[-\frac{|R(k) - H(k)s_k^j|^2}{2\delta_N^2}\right]}{\sum_{u_{k,i}=0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_N^2}} \exp\left[-\frac{|R(k) - H(k)s_k^j|^2}{2\delta_N^2}\right]} = \\ &= \log \frac{\sum_{u_{k,i}=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_N^2}} \exp\left[-\frac{(x_k - H_{re}(k)A_k + H_{im}(k)B_k)^2 + (x_k - H_{im}(k)A_k - H_{re}(k)B_k)^2}{2\delta_N^2}\right]}{\sum_{u_{k,i}=0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_N^2}} \exp\left[-\frac{(x_k - H_{re}(k)A_k + H_{im}(k)B_k)^2 + (x_k - H_{im}(k)A_k - H_{re}(k)B_k)^2}{2\delta_N^2}\right]} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 δ_N 表示噪声方差。

2 系统仿真

2.1 参数选择

对于 QPSK 调制方式, 我们选择码长均为 2 048, 码率 1/2, 度分配为 $\lambda(x) = x^2$ 的规则 LDPC 码和度分配为 $\lambda(x) = 0.308x + 0.273x^2 + 0.419x^6$ 的不规则 LDPC 码, 映射模式分别选择了格雷映射和自然映射, 规则 LDPC 码和不规则 LDPC 码均采用 PEG 算法构造 H 矩阵; 选择 1 024 个子载波进行 OFDM 调制, 调制频率为 9.14×10^6 Hz; 信道选择 20 径的瑞利衰落信道, 其通道的脉冲响应和频率响应如图 3 所示。

解映射采用式(10) 的软解调模式, LDPC 码的译码采用对数域的和-积算法。

2.2 相同的调制方式, 不同映射模式下不规则 LDPC 码性能比较

基于 QPSK 调制方式, 码长均为 2 048, 码率 1/2, 使用度分配为 $\lambda(x) = 0.308x + 0.273x^2 + 0.419x^6$ 的不规则 LDPC 码在格雷映射模式和自然映射模式系统的误码性能如图 4 所示。

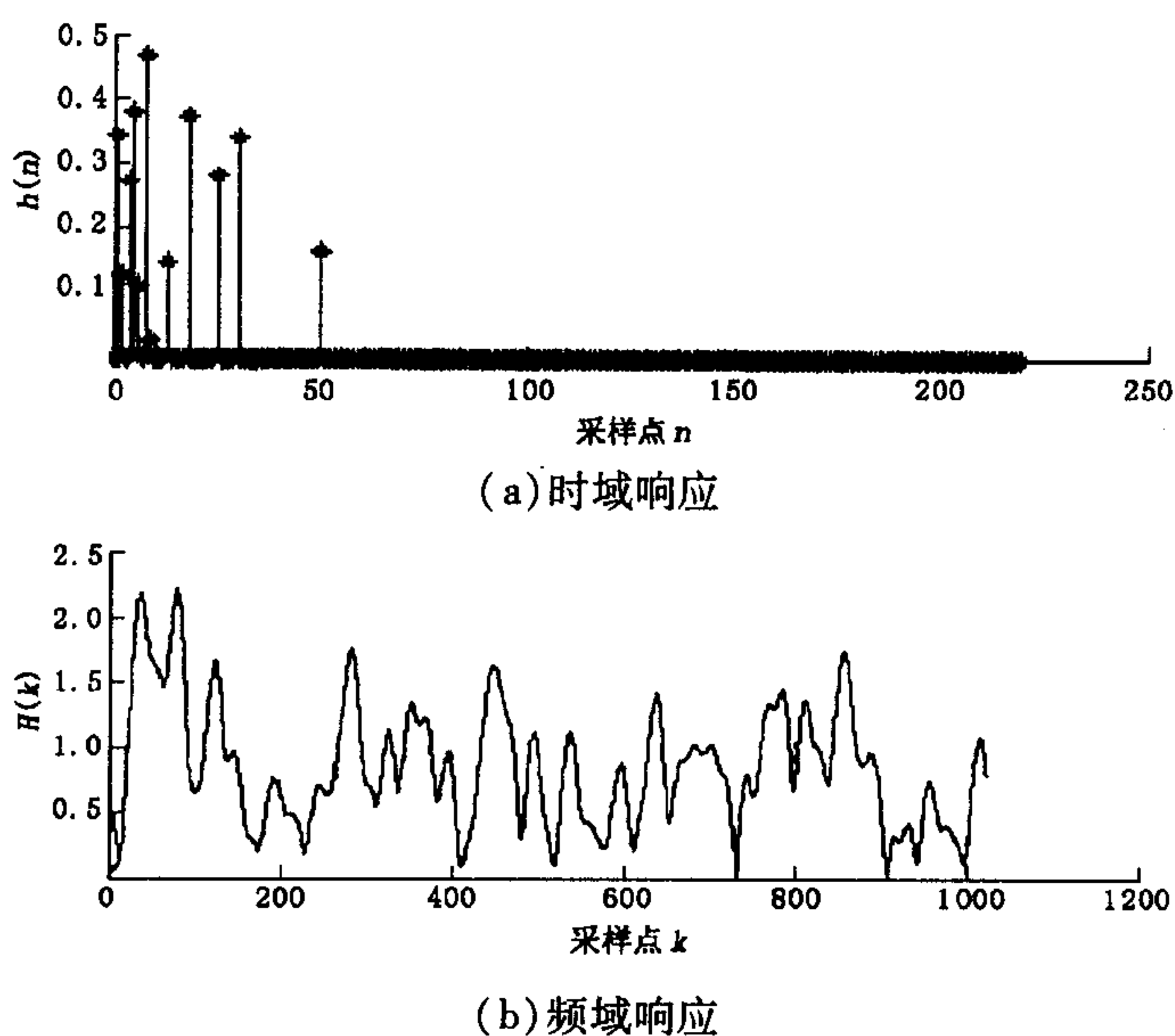


图3 20 径的瑞利衰落信道时域响应和频率响应图

QPSK 调制, 码长 2 048, 码率 1/2, 使用度分配为 $\lambda(x) = 0.308x + 0.273x^2 + 0.419x^6$ 的 LDPC 码在格雷映射模式和自然映射模式时系统的误码性能。

从仿真结果可以看出, 在其他条件相同的条件下, 5 次迭代译码, 信噪比在 4 - 9 dB 之间, 格雷映射模式的误码性能比自然映射模式好一些, 但信噪比大于 9 dB 之后, 自然映射模式的误码性能比格雷映射模式稍好一些时, 10 次迭代译码, 信噪比在 4 - 7 dB 之间, 格雷映射模式的误码性能优于自然映射模式, 但信噪比大于 7 dB 之后, 自然映射模式的误码性能优于格雷映射模式, 20 次迭代译码以上, 信噪比大于 4 dB, 格雷映射模式的误码性能比自然映射模式好得多, 增益达到 1 dB。

2.3 相同的调制方式和映射模式下规则和不规则 LDPC 码性能比较

基于 QPSK 调制方式, 码长均为 2 048, 码率 1/2, 度分配为 $\lambda'(x) = x^2$ 的规则 LDPC 码和度分配为 $\lambda(x) = 0.308x + 0.273x^2 + 0.419x^6$ 的不规则 LDPC 码在格雷映射模式下系统的误码性能如图 5 所示。

QPSK 调制, 格雷映射模式, 码长 2 048, 码率 1/2, 分别使用度分配为 $\lambda(x) = x^2$ 和 $\lambda'(x) = 0.308x + 0.273x^2 + 0.419x^6$ 的 LDPC 码的系统的误码性能。

从仿真结果可以看出, 在相同的条件下, 5 次迭代译码, 信噪比在 4 - 9 dB 之间, 不规则 LDPC 码的误码性能比规则 LDPC 码好一些, 但信噪比大于 9 dB 之后, 规则 LDPC 码的误码性能比不规则 LDPC 码稍好一些, 10 次迭代译码, 信噪比在 3 - 7.5 dB 之间, 不规则 LDPC 码的误码性能比规则 LDPC 码好, 但信噪比大于 7.5 dB 之后, 不规则 LDPC 码的误码性能比规则 LDPC 码稍好一些, 但随着迭代次数的增加, 不规则 LDPC 码性能比规则 LDPC 码性能好很多, 20 次迭代译码, 在误码率为 10^{-4} 时, 信噪比增益将近 1 dB。在误码率为 10^{-7} 时, 信噪比增益达到 1.2 dB。50 次迭代译码, 在误码率为 10^{-4} 时, 信噪比增益将近 1 dB。在误码率为 10^{-5} 时, 信噪比增益达到 1.4 dB。

3 结论

在静态多径瑞利衰落信道, 基于 OFDM 调制的 LDPC 码系统, 在相同的调制方式(QPSK)和相同的映射模式(格雷映射)下, 不规则 LDPC 码的误码性能比规则 LDPC 码好很多, 20 次迭代译码, 在误码率为 10^{-4} 时, 信噪比增益将近 1 dB。在误码率为 10^{-7} 时, 信噪比增益达到 1.2 dB。50 次迭代译码, 在误码率为 10^{-4} 时, 信噪比增益将近 1 dB。在误码率为 10^{-5} 时, 信噪比增益达到 1.4 dB。在相同的调制方式, 使用相同的码的条件下, 格雷映射的误码性能优于自然映射的误码性能。20 次迭代译码以上, 信噪比大于 4 dB, 格雷映射模式的误码性能比自然映射模式好得多, 增益达到 1 dB。

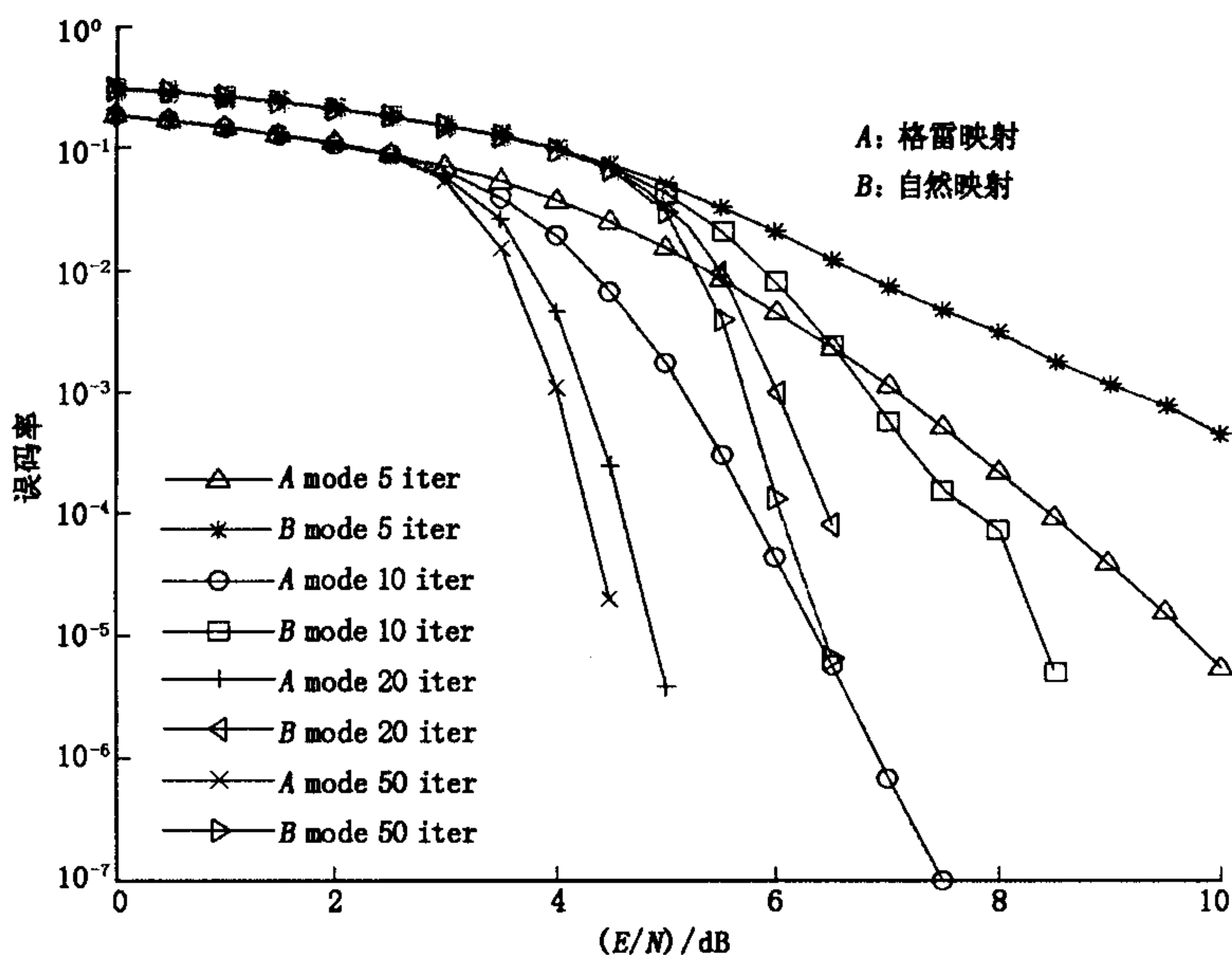


图4 给定条件下 LDPC 码分别在格雷与自然映射模式下系统误码性能比较图

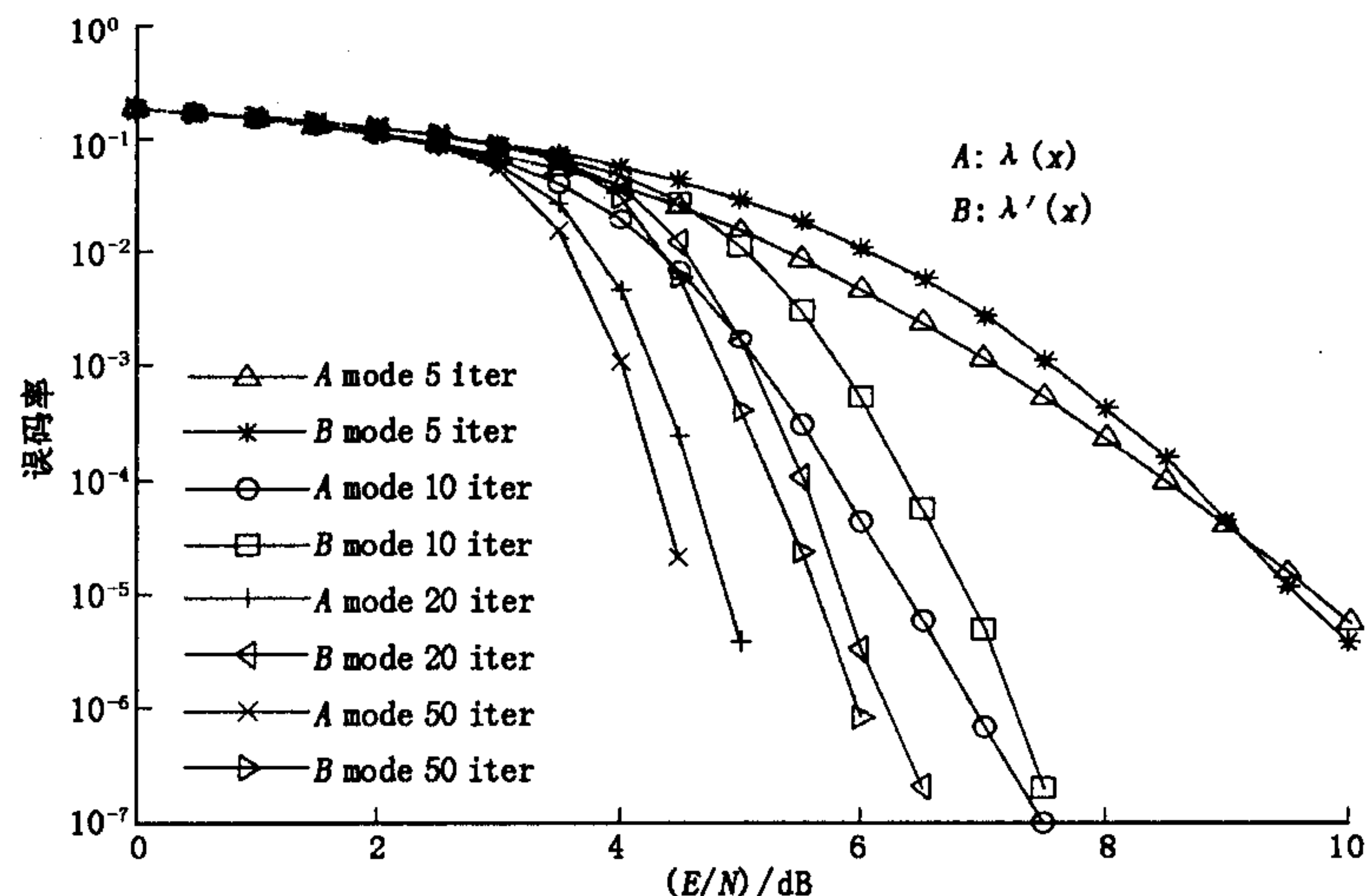


图5 不同度分配条件下 LDPC 码在格雷映射模式下系统误码性能图

参考文献:

- [1] Sandell M, Wilson S K, Borjesson P O. Performance Analysis of Coded OFDM on Fading Channels With non-ideal Interleaving and Channel Knowledge[J]. IEEE Proc, 1997, 2(2): 1380 - 1384.
- [2] Fernando W A C, Rajatheva R M A P. Performance of COFDM for LEO Satellite Channels in Global Mobile Communication [J]. IEEE Proc, 1998, 3(2): 1503 - 1507.
- [3] Hanjong Kim. Turbo Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing for Digital Audio broadcasting[J]. IEEE International Conference on Communications, 2000, (1): 420 - 424.
- [4] Gallager R G. Low Density Parity Check Codes[J]. IRE Trans Inform, 1962, 8, 21 - 28.
- [5] Luby M G, Mitzenmacher M, Shokrollahi M A, et al. Improved low-Density Parity-Check Codes Using Irregular Graphs [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2001, 47: 585 - 595.
- [6] MacKay D J C. Good Error-Correcting Codes Based on Very Sparse Matrices[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, 45: 399 - 431.
- [7] Tanner R M A. Recursive Approach to Low Complexity Codes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1981, 27: 533 - 547.
- [8] Chung S, Forney G, Richardson T, et al. On the Design of Low-Density Parity Check Codes With 0.0045 dB of the Shannon limit[J]. IEEE Commun letters, 2001, 5(2): 58 - 60.
- [9] Tanner R M. Minimum Distance Bounds By Graph Analysis[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2001, 47(2): 808 - 821.
- [10] Kou Y, Linand M, Fossorier S. Low-Density Parity Check Codes Based on Finite Geometries: a Discovery[J]. IEEE International Symposium on Inform Theory, 2000, 46: 773 - 775.
- [11] Hu X - Y, Eleftheriou E, Arnold D M. Progressive Edge-Growth Tanner Graphs[J]. IEEE Global Telecommunications Conference, 2001, 2: 995 - 1001.
- [12] Richardson T J, Shokrollahi A, Urbanke R. Design of Capacityapproaching Irregular low-density Parity-Check Codes [J]. IEEE Trans InformTheory, 2001, 47(2): 619 - 637.
- [13] Shokrollahi A, Storn R. Design of Efficient Erasure Codes With Differential Evolution[J]. IEEE Int Symp Information Theory, 2000, 46: 676 - 679.
- [14] Hou J, Siegel P H, Milstein L B. Performance Analysis and Code Optimization of Low Density Parity-Check Codes on Rayleigh Fading Channels[J]. IEEE Jour on Selected Areas in Communications, 2001, 19(5): 924 - 934.
- [15] 吴晓丽, 葛建华, 岳安军. 非规则 Turbo LDPC 码性能分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2005, 6(5): 56 - 58.

(编辑: 门向生)

Performance of Irregular LDPC Codes Based on Multi-path Fading Channel

WU Xiao-li^{1,2}, GE Jian-hua¹, YUE An-jun¹

(1. National Key Lab. of ISN, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China; 2. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: Performance analysis is made using the irregular LDPC codes for the OFDM system based on the static uncorrelated multi-path Rayleigh fading channel and the comparison with regular LDPC codes. It shows that the performance of irregular LDPC codes is better than that of the regular LDPC codes in any modulation and any map code. The BER in Gray map mode is superior to that in nature map mode in performance at the same condition.

Key words: regular LDPC codes; irregular LDPC codes; COFDM