第 6 卷第 6 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 6 No. 6
2005 年 12 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE EDITION)　　Dec. 2005

一类奇次系统极限环的存在唯一性研究

杨友社
(空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)

摘　要:利用 Sansone 定理和旋转向量场理论对平面奇次系统 $\dot{x}=-y(1-ax)(1-bx)+\delta x-lx^{2n+1}$、$\dot{y}=x(1-ax)(1-bx)$ 进行了全面的分析,得到其极限环的存在性、唯一性及不存在性的完整结果。

关键词:奇次系统;极限环;存在性;唯一性
中图分类号: O175.12　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2005)06-0084-03

关于平面自治微分系统的定性研究,二次系统已有大量系统的结果,奇次系统的研究也有不少结果[1-3],但在讨论极限环中,对 Sansone 定理[4]的应用比较少见。本文主要运用 G. Sansone 定理和旋转向量场理论完整的解决了奇次系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y(1-ax)(1-bx)+\delta x-lx^{2n+1}=p(x,y)\\ \dot{y}=x(1-ax)(1-bx)=Q(x)\end{cases}\qquad 其中\ n\in N \tag{1}$$

的极限环的存在唯一性问题。

定理 1　当 $\delta l\leqslant 0$ 时,系统(1)不存在极限环。

证明　设 $F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$,则 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_{(1)}=x^2(\delta-lx^{2n})$,故当 $\delta=l=0$ 时,$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_{(1)}=0$,所以 $O(0,0)$ 为中心;当 $\delta^2+l^2\neq 0,\delta l\leqslant 0$ 时,$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}|_{(1)}$ 为常号,则系统(1)不存在极限环,即定理 1 成立。

根据定理 1,以下可假定式(1)中 $\delta>0$、$l>0$,否则,可通过变换 $x=-\bar{x}$、$y=-\bar{y}$、$t=-\tau$ 来实现。在 $\delta>0$、$l>0$ 且 $ab\neq 0$ 的假定下,只需讨论以下两种情形:① $a<0<b$,$|a|\leqslant b$; ② $b\geqslant a>0$ 。其它情形均可通过变换 $x=-\bar{x}$、$y=-\bar{y}$ 化成上述情形。

引理　当 $a<0<b$、$|a|\leqslant b$、且 $\delta<\frac{l}{b^{2n}}$ 时,函数 $F(x)=\frac{-\delta x+lx^{2n+1}}{(1-ax)(1-bx)}$ 存在 δ_{-1}、δ_1,满足 $\frac{1}{a}<\delta_{-1}<0<\delta_1<\frac{1}{b}$,使得当 $\delta_{-1}<x<\delta_1$ 时,$F'(x)<0$;当 $\frac{1}{a}<x<\delta_{-1}$ 以及 $\delta_1<x<\frac{1}{b}$ 时,$F'(x)>0$ 。

证明

$$F'(x)=\frac{(2n-1)ablx^{2n+2}-2nl(a+b)x^{2n+1}+(2n+1)lx^{2n}+\delta abx^2-\delta}{(1-ax)^2(1-bx)^2}\equiv\frac{\varphi(x)}{(1-ax)^2(1-bx)^2}$$

$$\varphi'(x)=2x[(2n-1)(n+1)ablx^{2n}-n(2n+1)l(a+b)x^{2n-1}+n(2n+1)lx^{2n-2}+\delta ab]\equiv 2x\varphi_1(x)$$

因 $\varphi_1(\frac{1}{b})=ab(\delta-\frac{l}{b^{2n}})>0$、$\varphi_1(\frac{1}{a})=ab(\delta-\frac{l}{a^{2n}})>ab(\delta-\frac{l}{b^{2n}})>0$、又 $abl<0$,所以 $\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$ 时,$\varphi_1(x)>0$。由此知当 $\frac{1}{a}<x<0$ 时,$\varphi'(x)<0$;当 $0<x<\frac{1}{b}$ 时,$\varphi'(x)>0$,而 $\varphi(0)=-\delta<0$,且 $\varphi(\frac{1}{a})=(\frac{b}{a}-1)(\delta-\frac{l}{a^{2n}})>0$、$\varphi(\frac{1}{b})=(\frac{a}{b}-1)(\delta-\frac{l}{b^{2n}})>0$,故存在 $\frac{1}{a}<\delta_{-1}<0<\delta_1<\frac{1}{b}$,使得当 $\delta_{-1}<x<\delta_1$ 时,$\varphi(x)$

收稿日期:2005-05-18
作者简介:杨友社(1962-),男,陕西大荔人,副教授,主要从事微分方程研究.

<0；当$\frac{1}{a}<x<\delta_{-1}$及$\delta_{-1}<x<\frac{1}{b}$时，$\varphi(x)>0$。所以，引理成立。

定理2　当$a<0<b$，$|a|\leqslant b$、且$\delta<\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)存在唯一的极限环，且此环是稳定的。

证明　因为$x=\frac{1}{a}<0$，$x=\frac{1}{b}>0$均为式(1)的无切直线，所以若有闭轨线存在，必位于条形域$\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$内。

作变换$dt=\frac{d\tau}{(1-ax)(1-bx)}$，并将$\frac{dx}{d\tau}$、$\frac{dy}{d\tau}$仍分别记作$\dot{x}$、$\dot{y}$，于是式(1)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-\dfrac{lx^{2n+1}-\delta x}{(1-ax)(1-bx)}\equiv -y-F(x)\\ \dot{y}=x\end{cases}\tag{2}$$

因为$0<\delta<\frac{l}{b^{2n}}$、$\delta<\frac{l}{b^{2n}}$，所以$0<\delta<\frac{l}{a^{2n}}$，则$\frac{1}{a}<-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}<\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}<\frac{1}{b}$，故在条形域$\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$内有$F(-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}})=F(\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}})=0$，且$F(\frac{1}{a}+0)=-\infty$，$F(\frac{1}{b}-0)=+\infty$。又由引理知，存在$\frac{1}{a}<\delta_{-1}<0<\delta_1<\frac{1}{b}$，当$\delta_{-1}<x<\delta_1$时，$F'(x)<0$；当$\frac{1}{a}<x<\delta_1$以及$\delta_1<x<\frac{1}{b}$时，$F'(x)>0$。所以由Sansone定理[4]知系统(1)存在唯一的极限环，易见此环是稳定的。

定理3　当$a<0<b$、$|a|\leqslant b$，且$\delta<\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)不存在闭轨线。

证明　与定理2证明相同，只需在条形域$\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$内讨论。因为$\begin{vmatrix}P & Q\\ P_\delta & Q_\delta\end{vmatrix}=-x^2(1-ax)(1-bx)\leqslant 0$，即系统(1)关于$\delta$构成旋转向量场，所以只需证明当$\delta=\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)不存在闭轨线即可。事实上，若系统(1)在某一个$\delta^*>\frac{l}{b^{2n}}$时有闭轨线$\Gamma^*$，它必定正定向。由于$\delta>0$时奇点0不稳定，而且当$\delta=\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)的正向轨线将由$\Gamma^*$的外部穿向其内部。从而由环域定理可知，在$\Gamma^*$的内部应存在系统(1)的极限环，故矛盾。

当$\delta=\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)变为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y(1-ax)(1-bx)+lx(\frac{1}{b^{2n}}-x^{2n})\\ \dot{y}=x((1-ax)(1-bx)\end{cases}\tag{3}$$

设系统(3)有闭轨线Γ，则易知Γ必位于条形域$\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$内部，且$\Gamma$与圆族$x^2+y^2=R^2(0<R<\frac{1}{b})$中的某一些圆至少相交两次。

令$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$，则当$|x|\leqslant\frac{1}{b}$时，有$\frac{dF}{dt}|_{(3)}=lx^2(\frac{1}{b^{2n}}-x^{2n})\geqslant 0$，矛盾，故$\delta=\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)不存在闭轨线。从而得到，当$\delta\geqslant\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)不存在闭轨线。

当$b\geqslant a>0$时，在半平面$x<\frac{1}{b}$内类似于定理2、3的推理。

定理4　当$b\geqslant a>0$、$\delta<\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)存在唯一的极限环，且此环是稳定的。

定理5　当$b\geqslant a>0$、$\delta\geqslant\frac{l}{b^{2n}}$时，系统(1)不存在闭轨线。

当$ab=0$，但$a^2+b^2\neq 0$时，不妨设$b=0$，则系统(1)成为

$$\begin{cases}\dot{x} = -y(1-ax)(1-bx)+\delta x - lx^{2n+1} \\ \dot{y} = x(1-ax)\end{cases} \tag{4}$$

当 $a=b=0$,系统(1)成为

$$\begin{cases}\dot{x} = -y+\delta x - lx^{2n+1} \\ \dot{y} = x\end{cases} \tag{5}$$

仿前证明可得

定理6 当 $0<\delta<\frac{l}{a^{2n}}$ 时,系统(4)存在唯一的稳定极限环;当 $\delta \geqslant \frac{l}{a^{2n}}>0$ 时,系统(4)不存在闭轨线。

定理7 系统(5)存在唯一的极限环,且它是稳定的。

综合以上讨论,对系统(1)就系数在各种可能情形下的结论归纳如下:

当 $\delta l \leqslant 0$ 时,系统(1)不存在极限环;当 $\delta l>0$、$a^2+b^2 \neq 0$、$|\delta|<\frac{|l|}{\max\{a^{2n},b^{2n}\}}$ 时,系统(1)存在唯一的极限环;当 $\delta l>0$、$a^2+b^2 \neq 0$、$|\delta| \geqslant \frac{|l|}{\max\{a^{2n},b^{2n}\}}$ 时,系统(1)不存在闭轨线;当 $\delta l>0$、$a^2+b^2=0$ 时,系统(1)存在唯一的极限环。当极限环存在时,此环当 $\delta l>0$ 时是稳定的;当 $\delta l<0$ 时是不稳定的。

参考文献:

[1] 李建全. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 系统科学与数学,1999,19(1):16-18.
[2] 杨友社. 一类平面微分系统极限环的存在唯一性[J]. 西北大学学报(自然科学版),2000,30(6):81-86.
[3] 李建全,王国正. 一类平面微分系统极限环的不存在性[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2001,2(2):78-81.
[4] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海:上海科学技术出版社,1984.

(编辑:门向生)

A Study of the Existence and Uniqueness of Limit Cycle for a Type of Odd Order Systems

YANG You-she
(The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: By means of Sansone's Theorem and Theory of rotation vector fields, differential systems $X = -\dot{y}(1-ax)(1-bx)+\delta x - Lx2n+1$, $\dot{y} = x(1-ax)(1-bx)$ are analyzed comprehensively, The existence, uniqueness and nonexistence are investigated, and the complete results are obtained.

Key words: odd order systems; limit cycle; existence; uniqueness

(本卷终)