第6卷第6期　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　Vol.6 No.6
2005年12月　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　Dec.2005

基于非线性回归最小二乘法的改进 Gompertz 模型参数估计

尹　瑛，　徐吉辉，　端木京顺
(空军工程大学 工程学院，陕西 西安　710051)

摘　要：可靠性增长试验是产品研制阶段不可缺少的一项提高产品可靠性的工程项目。成败型试验的可靠性增长数据通常用 Gompertz 模型进行评估，但存在 S 形增长数据拟合精度差的不足。根据高斯－牛顿最小二乘法和多元线性回归最小二乘法原理，提出改进的 Gompertz 模型参数估计的非线性回归最小二乘法。用试验数据对改进后的模型进行验证，拟合度较好。

关键词：改进的 Gompertz 模型；非线性回归 ；最小二乘法；参数估计
中图分类号：TB114.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009－3516(2005)05－0077－03

产品在设计初期往往存在某些缺陷，大量的实践经验和统计结果表明：新产品样机的初始可靠性只能达到目标值的30%左右；据美国有关资料介绍，现代电子设备可靠性设计方面的问题，有75%是靠实验发现的，而且用于纠正产品可靠性缺陷的试验时间将达到 MTBF 值的5～25倍[1]。因此，在产品研制后期，可靠性增长试验是一项很重要的工作项目，是提高复杂产品可靠性的有效途径。

20世纪50年代以来，可靠性增长技术发展迅速，先后提出了22种离散型或连续型增长模型，其中离散型增长模型适用于成败型产品或不可修的寿命产品，连续型增长模型适用于连续工作的可修复产品[2]。目前，应用最普遍是 Gompertz（坎培提兹）、Duane(杜安)和 AMSAA(Crow 克劳)模型。对于试验取得的二项分布(成败型)数据和指数分布型寿命数据，通常使用 Gompertz 模型或者改进的 Gompertz 模型等评估。

1　改进的 Gompertz 模型及算法

1.1　模型描述

1968年，E. P. Virene 用 Gompertz 曲线来描述可靠性增长：起初较慢，以后逐渐加快，到某点后增长速度又减慢趋于一个极限的规律。Gompertz 模型可表示为 $R(N)=ab^{C^N}$，$(N\geq 0)\ 0<a,b,c<1$，式中 a、b、c 为参数，$R(N)$ 表示第 N 次故障时刻的可靠度[3]。但对于具有 S 形增长趋势的可靠性增长数据，Gompertz 模型描述精度较差，甚至出现不合理的评估结果[2]。1994年，D. Kececioglu 和 Jiang Siyuan 等提出改进的 Gompertz 模型 $R(N)=d+ab^{c^N}$，$N\geq 0$，用于精确评估具有 S 形增长趋势的可靠性增长数据。[4]

1.2　改进的 Virene 算法

产品研制可靠性增长分3阶段。每阶段实验组数为 m，依次为 $0,1,\cdots,m-1$；$m,m+1,\cdots,2m-1$；$2m,2m+1,\cdots,3m-1$。因 $R_i=d+ab^{c^i}$，有 $\ln(R_i-d)=\ln a+c^i\ln b$，$(i=0,1,\cdots,3m-1)$，求参数 a,b,c,d。

$$H_1(d)=\sum_{i=0}^{m-1}\ln(R_i-d)=m\ln a+\ln b\sum_{i=0}^{m-1}c^i$$

$$H_2(d)=\sum_{i=0}^{2m-1}\ln(R_i-d)=m\ln a+\ln b\sum_{i=0}^{2m-1}c^i\qquad \frac{H_3(d)-H_2(d)}{H_2(d)-H_1(d)}=\frac{\sum_{i=2m}^{3m-1}c^i-\sum_{i=m}^{2m-1}c^i}{\sum_{i=m}^{2m-1}c^i-\sum_{i=m}^{m-1}c^i}=c^m,\text{得 } c=\left[\frac{H_3(d)-H_2(d)}{H_2(d)-H_1(d)}\right]^{\frac{1}{m}};$$

$$H_3(d)=\sum_{i=2m}^{3m-1}\ln(R_i-d)=m\ln a+\ln b\sum_{i=2m}^{3m-1}c^i$$

收稿日期：2004－11－12
作者简介：尹　瑛(1965－)，男，湖南临澧人，工程师，硕士生，主要从事装备技术保障和管理等研究.

由$\begin{cases}H_1(d)-m\ln a=\ln b\sum_{i=0}^{m-1}c^i\\ H_2(d)-m\ln a=\ln b\sum_{i=m}^{2m-1}c^i\end{cases}$ $\dfrac{H_2(d)-m\ln a}{H_1(d)-m\ln a}=c^m$,得 $a=\exp\left[\dfrac{1}{m}\left(H_1(d)+\dfrac{H_2(d)-H_2(d)}{1-c^m}\right)\right]$;

由$\begin{cases}H_1(d)-\ln b\sum_{i=0}^{m-1}c^i=m\ln a\\ H_2(d)-\ln b\sum_{i=m}^{2m-1}c^i=m\ln a\end{cases}$ $H_1(d)-\ln b\sum_{i=0}^{m-1}c^i=H_2(d)-\ln b\sum_{i=m}^{2m-1}c^i$,得 $b=\exp\left[\dfrac{[H_2(d)-H_1(d)](c-1)}{(1-c^m)^2}\right]$

先估计参数 d,再推导参数 a,b,c。当 $N=0$ 时有 $d+ab-R_0=0$。X 轴上标出 d 值,Y 轴上标出 $d+ab-R_0$,则 X 轴上截距就是 d 的估计。其精度通过 d 值增量得到控制。反复上述过程,直到 d 的精度满足要求。使用改进的 Virene 算法可满足一般的拟合精度要求。

2 参数估计的非线性回归最小二乘法

非线性回归最小乘法拟合数据,拟合曲线与数据点之间的水平距离、垂直距离的平方和应达到最小。用高斯-牛顿法,将 $f(N_i,\beta)$ 按泰勒级数展开,用线性项近似非线性模型,用最小二乘法估计参数校正量,得到参数首次估计。过程反复迭代,最终导出问题解。设 $R_i=f(N_i,\beta)=d+ab^{cN}$,$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,式中 $\beta=[\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4]^T=[a\ b\ c\ d]^T$。

已知 n 组样本观测值 (N_i,R_i),$i=0,1,2,\cdots,n-1$,选取改进的 Virene 算法得到参数 $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}$的初始点,用 $\beta_1^{(0)},\beta_2^{(0)},\beta_3^{(0)},\beta_4^{(0)}$ 表示,在点 $(\beta_1^{(0)},\beta_2^{(0)},\beta_3^{(0)},\beta_4^{(0)})$ 邻域内将 $f(N_i,\beta)$ 按泰勒级数展开,有 $f(N_i,\beta)\approx f(N_i,\beta^{(0)})+\sum_{k=1}^{4}\left[\dfrac{\partial f(N_i,\beta)}{\partial\beta_K}\right]_{\beta_k-\beta_k^{(0)}}$,式中 $f_i^{(0)}=f(N_i,\beta^{(0)})$,$\Delta\beta_k^{(0)}=\beta_k-\beta_k^{(0)}$,$D_{i,k}^{(0)}=\left[\dfrac{\partial f(N_i,\beta)}{\partial\beta_K}\right]_{\beta_k-\beta_k^{(0)}}$,有 $R_i\approx f_i^{(0)}\sum_{k=1}^{4}D_{i,k}^{(0)}\Delta\beta_k^{(0)}$,$\Delta R_i^{(0)}\approx\sum_{k=1}^{4}D_{i,k}^{(0)}\Delta\beta_k^{(0)}$。矩阵表示为 $\Delta\boldsymbol{R}^{(0)}\approx\boldsymbol{D}^{(0)}\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)}$,式中:$\Delta\boldsymbol{R}^{(0)}=$

$$\begin{bmatrix}R_0-f_0^{(0)}\\R_1-f_1^{(0)}\\\vdots\\R_{n-1}-f_{n-1}^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_0-\beta_4^{(0)}-\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)t_0}}\\R_1-\beta_4^{(0)}-\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)t_1}}\\\vdots\\R_{n-1}-\beta_4^{(0)}-\beta_1^{(0)}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)t_{n-1}}}\end{bmatrix}\quad\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)}=\begin{bmatrix}\beta_1-\beta_1^{(0)}\\\beta_2-\beta_2^{(0)}\\\beta_3-\beta_3^{(0)}\\\beta_4-\beta_4^{(0)}\end{bmatrix},$$

$$\Delta\boldsymbol{D}^{(0)}=\begin{bmatrix}D_{0,1}^{(0)}&D_{0,2}^{(0)}&D_{0,3}^{(0)}&D_{0,4}^{(0)}\\D_{1,1}^{(0)}&D_{1,2}^{(0)}&D_{1,3}^{(0)}&D_{1,4}^{(0)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\D_{n-1,1}^{(0)}&D_{n-1,2}^{(0)}&D_{n-1,3}^{(0)}&D_{n-1,4}^{(0)}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_0}}&\dfrac{\beta_1^{(0)}}{\beta_2^{(0)}}\beta_3^{(0)N_0}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_0}}&\dfrac{\beta_1^{(0)}}{\beta_3^{(0)}}\beta_3^{(0)N_0}\ln(\beta_2^{(0)})N_0\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_0}}&1\\\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_1}}&\dfrac{\beta_1^{(0)}}{\beta_2^{(0)}}\beta_3^{(0)N_1}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_1}}&\dfrac{\beta_1^{(0)}}{\beta_3^{(0)}}\beta_3^{(0)N_1}\ln(\beta_2^{(0)})N_1\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_1}}&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_{n-1}}}&\dfrac{\beta_1^{(0)}}{\beta_2^{(0)}}\beta_3^{(0)N_{n-1}}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_{n-1}}}&\dfrac{\beta_1^{(0)}}{\beta_3^{(0)}}\beta_3^{(0)N_{n-1}}\ln(\beta_2^{(0)})N_{n-1}\beta_2^{(0)\beta_3^{(0)N_{n-1}}}&1\end{bmatrix}$$,参数 β 校正量

$\Delta\hat{\beta}^{(0)}=(D^{(0)T}D^{(0)})^{-1}D^{(0)T}\Delta R^{(0)}$,校正后的回归系数 $\beta^{(1)}=\beta^{(0)}+\Delta\hat{\beta}^{(0)}$。对参数初始点 $\beta^{(0)}$,残差平方和 $Q^{(0)}=\sum_{j=0}^{n-1}[R_i-f(N_i,\beta^{(0)})]^2$。校正后 $\beta^{(1)}$,残差平方和 $Q^{(1)}=\sum_{j=0}^{n-1}[R_i-f(N_i,\beta^{(1)})]^2$。存在关系 $Q^{(k+1)}<Q^{(k)}$,对所有 k 值均应成立,即 $\beta^{(k+1)}$是一个比 $\beta^{(k)}$更好的估计。将 $\beta^{(1)}$ 作为初始点,通过运算产生新的结果 $\beta^{(2)}$,迭代过程反复进行,直到满足下述关系停止:$Q^{(s-1)}\approx Q^{(s)}$。

3　算法验证与结论

按照 Virene 算法确定 Gompertz 曲线的参数 $\hat{a}=104.149$，$\hat{b}=0.2221$，$\hat{c}=0.6260$，$R(N)=104.149\times 0.2221^{0.6260^N}$。预测的可靠性曲线和原始的可靠性数据如图 1，可看出 Gompertz 模型不能很好地拟合数据。再确定改进的 Gompertz 曲线的参数，d 值在 $0\leqslant d<31.00$ 范围内逐点计算。d 的步进增量取 0.1，0.001，0.0001。求解得到 $\hat{a}=69.3234$，$\hat{b}=0.002523$，$\hat{c}=0.460107$，$\hat{d}=30.8251$ 。根据非线性回归最小二乘法，参数最终估计为 $\hat{a}=69.0388$，$\hat{b}=0.0020$，$\hat{c}=0.4567$，$\hat{d}=30.0371$，$R(N)=31.0371+69.0388\times 0.002^{0.4567^N}$。预测的和原始的可靠性数据见图 1、图 2。改进的 Gompertz 模型能非常好地拟合数据。

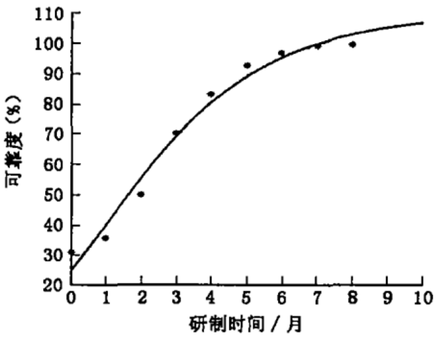

图 1　原始数据与 Gompertz 曲线

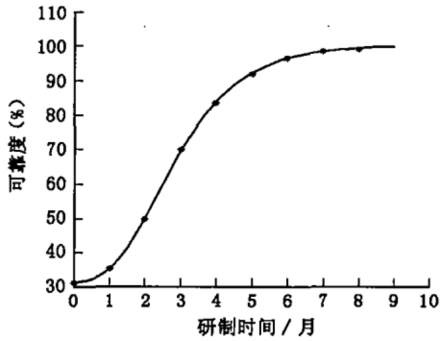

图 2　原始数据与改进的 Gompertz 曲线

数据验证表明，对于 S 形增长趋势的成败型可靠性增长数据，使用改进的 Virene 算法与拟合精度较差，采用非线性回归最小二乘法却能非常好地拟合数据。

参考文献：

[1]　曾天翔. 可靠性维修性工程手册（上、下册）[M]. 北京：国防工业出版社，1994.

[2]　梅文华. 可靠性增长试验[M]. 北京：国防工业出版社，2003.

[3]　孔瑞莲. 航空发动机可靠性工程[M]. 北京：航空工业出版社，1996.

[4]　Kececioglu Dimitri, Jiang Siyuan, Vassiliou Pantelakis. The modified Compertz reliability – growth model [A]. 1994 Proceedings annual reliability and maintainability symposium[C], Anaheim, California, 1994, 160 – 165.

（编辑：姚树峰）

Parameter Estimation for Modified Gompertz Model Based on the Least – square – method of Nonlinear Regression

YIN Ying, XU Ji – hui, DUANMU Jing – shun

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: The reliability – growth testing is an inevitable project item for increasing the reliability of product in the process of developing products. The Gompertz model is usually used to estimate the data of the reliability – growth for success – and – failure test, but it shows poor fitness for S – shaped growth data. A least square method of nonlinear regression for modified Gompertz model parameter estimation is brought forward according to Gauss – Newton least square method and multiple linear regression least square method, and the fitness for the modified Gompertz model can be proved by using the data of test.

Key words: modified Gompertz model; nonlinear regression; least square method; parameter estimation