关于 Fibonacci 数的一类行列式的计算

梁放驰[1,2]，　徐成贤[1]
(1.西安交通大学 理学院，陕西 西安 710049;2.空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051)

摘　要:研究了一类由 Fibonacci 数组成的行列式 $D_n(m,k,l)$ 的计算问题,证明了当 $m\leqslant n-2$ 时有恒等式 $D_n(m,k,l)=0$,当 $m=n-1$ 时给出了一个计算其值的公式。

关键词:Fibonacci 数；行列式；恒等式
中图分类号:O156.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2004)05-0089-03

著名的 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 是一个重要的数列,它在应用数学、组合数学、生物工程以及遗传、医学等领域有着广泛的应用。Fibonacci 数列的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),n=0,1$$

其中 $\alpha=(1+\sqrt{5})/2,\beta=(1-\sqrt{5})/2$ (参阅文献[1]),且有 $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\geqslant2$。本文的主要目的是引入一类由 Fibonacci 数组成的行列式:

$$D_n(m,k,l)=\begin{vmatrix} F^m_{k+l} & F^m_{k+2l} & \cdots & F^m_{k+nl} \\ F^m_{k+(n+1)l} & F^m_{k+(n+2)l} & \cdots & F^m_{k+2nl} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F^m_{k+[n(n-1)+1]l} & F^m_{k+[n(n-1)+2]l} & \cdots & F^m_{k+n^2l} \end{vmatrix}$$

并研究 $D_n(m,k,l)$ 值的计算问题,其中 k 是非负整数, m,n,l 为自然数, $F^m_{k+il}(i=1,2,\cdots,n^2)$ 表示数 F_{k+il} 的 m 次幂,对 $l=1,m\leqslant n-2$ 的情形,杨长恩等在文献[2]中证明了恒等式

$$D_n(m,k,1)=0$$

本文证明了 $l\in Z^+$, $m\leqslant n-2$ 时,有 $D_n(m,k,l)=0$;并且当 $m=n-1$ 时,对行列式 $D_n(m,k,1)$ 的取值给出了一个计算公式,即有下述定理:

定理 设 k 是非负整数, m,n,l 为自然数,则当 $m\leqslant n-2$ 时,有 $D_n(m,k,l)=0$;当 $m=n-1$ 时,有

$$D_n(m,k,l)=\frac{1}{\sqrt{5}^{nm}}(-1)^{\frac{mn(k+1)}{2}}\alpha^{\frac{mn(n^2+1)}{2}}C^0_mC^1_m\cdots C^m_m\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{nl(j-1)}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{nl(i-1)}\right]\times \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{l(i_1+2i_2+\cdots+ni_n)}$$

其中 $C^n_m=\dfrac{m!}{(m-n)!n!}$,$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 为数 $0,1,2,\cdots,n-1$ 组成的一个排列,其逆序数为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$, $\sum\limits_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}$ 表示对 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 所有可能的排列求和。

1　引理及其证明

为了完成定理的证明,需要对 Vandermonde 行列式(记为 V_n) 的性质作以简单讨论。首先引进一种广义

收稿日期:2003-11-17
基金项目:国家自然科学基金重点资助项目(10231060)
作者简介:梁放驰(1974-),男,陕西兴平人,讲师,硕士生,主要从事最优化理论研究;
徐成贤(1946-),男,上海人,教授,博士生导师,主要从事最优化理论与应用及金融数学研究.

的 Vandermonde 行列式

$$\overline{V}_n = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_n^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{i_n} & \cdots & x_n^{i_n} \end{vmatrix}$$

其中 $i_k = 0,1,2,\cdots,n-1$，且 $i_k \neq i_j(k,j = 1,2,\cdots n)$。对 $\overline{V}_n$ 有下面的结论：

引理 对广义的 Vandermonde 行列式 $\overline{V}_n$，有

$$\overline{V}_n = (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)\text{，且}|\overline{V}_n| = V_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)\text{。}$$

证明 由行列式的性质易知，$\overline{V}_n$ 的值与 V_n 的值只相差一个符号，且只与排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 的逆序数有关，故

$$\overline{V}_n = (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)\text{，且}|\overline{V}_n| = V_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

2 定理的证明

证明 由二项式定理可得

$$D_n(m,k,l) = \begin{vmatrix} F_{k+l}^m & F_{k+2l}^m & \cdots & F_{k+nl}^m \\ F_{k+(n+1)l}^m & F_{k+(n+2)l}^m & \cdots & F_{k+2nl}^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{k+[n(n-1)+1]l}^m & F_{k+[n(n-1)+2]l}^m & \cdots & F_{k+n^2l}^m \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}^{nm}} \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $A_{rs} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_m^i \alpha^{\{k+[n(r-1)+s]l\}(m-i)} \beta^{\{k+[n(r-1)+s]l\}i}, 1 \leqslant r,s \leqslant n$。首先将行列式 $D_n(m,k,l)$ 按第1列系数 $C_m^{i_2}(i_2 = 0,1,\cdots,m)$ 相同的拆成 $n+1$ 个行列式之和，

$$D_n(m,k,l) = \frac{1}{\sqrt{5}^{nm}} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_m^i \begin{vmatrix} \alpha^{(k+l)(m-i_1)}\beta^{(k+l)i_1} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \alpha^{[k+(n+1)l](m-i_1)}\beta^{[k+(n+1)l]i_1} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{\{k+[n(n-1)+1]l\}(m-i_1)}\beta^{\{k+[n(n-1)+1]l\}i_1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

再按上述和式中每个行列式的第2列系数 $C_m^{i_2}(i_2 = 0,1,\cdots,m)$ 把每个行列式再拆成 $m+1$ 个行列式，依次下去，一共拆成 $(m+1)^n$ 个行列式，即得

$$D_n(m,k,l) = \frac{1}{(\sqrt{5})^{nm}} \sum_{i_1=0}^{m}\sum_{i_2=0}^{m}\cdots\sum_{i_n=0}^{m}(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)} C_m^{i_1}C_m^{i_2}\cdots C_m^{i_n} \times$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^{(k+l)(m-i_1)}\beta^{(k+l)i_1} & \cdots & \alpha^{(k+nl)(m-i_n)}\beta^{(k+nl)i_n} \\ \alpha^{[k+(n+1)l](m-i_1)}\beta^{[k+(n+1)l]i_1} & \cdots & \alpha^{(k+2nl)(m-i_n)}\beta^{(k+2nl)i_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{\{k+[n(n-1)+1]l\}(m-i_1)}\beta^{\{k+[n(n-1)+1]l\}i_1} \cdots & & \alpha^{(k+n^2l)(m-i_n)}\beta^{(k+n^2l)i_n} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{5})^{nm}} \sum_{i_1=0}^{m}\sum_{i_2=0}^{m}\cdots\sum_{i_n=0}^{m}(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)} C_m^{i_1}C_m^{i_2}\cdots C_m^{i_n} \times$$

$$\alpha^{(k+l)(m-i_1)}\beta^{(k+l)i_1}\cdots\alpha^{(k+nl)(m-i_n)}\beta^{(k+nl)i_n} \times \alpha^{nml}\cdots\alpha^{n(n-1)ml} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (\frac{\beta}{\alpha})^{nli_1} & \cdots & (\frac{\beta}{\alpha})^{nli_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\frac{\beta}{\alpha})^{n(n-1)li_1} & \cdots & (\frac{\beta}{\alpha})^{n(n-1)li_n} \end{vmatrix} \quad (1)$$

上式中每个 i_k 的取值范围是 0 到 m 这 $m+1$ 个整数,所以有

(i) 当 $m \leqslant n-2$ 时,由抽屉原则知 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 这 n 个变量中至少有两个是相等的,则 $D_n(m,k,l)=0$ 。

(ii) 当 $m=n-1$ 时,只有当 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 这 n 个变量与 0 到 m 这 n 个整数一一对应时,式(1) 中的行列式的值才不为 0,满足此条件的行列式共有 $(m+1)!$ 个。此时式(1) 中的行列式恰为前面所引入的广义的 Vandermonde 行列式,其中 $x_k=(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(k-1)}, k=1,2,\cdots,n$ 。注意到 $\alpha\beta=-1$,结合引理有

$$
\begin{aligned}
D_n(m,k,l) = {} & \frac{1}{(\sqrt{5})^{mn}}(-1)^{0+1+\cdots+m} C_m^0 C_m^1 \cdots C_m^m \alpha^{nml+\cdots+n(n-1)ml} \times \\
& \prod_{1 \leqslant j<i \leqslant n}\left[(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(j-1)}-(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(i-1)}\right] \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)}(-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)} \alpha^{m(k+l)}(\frac{\beta}{\alpha})^{(k+l) i_1} \cdots \alpha^{m(k+nl)}(\frac{\beta}{\alpha})^{(k+nl) i_n} = \\
& \frac{1}{(\sqrt{5})^{mn}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} C_m^0 C_m^1 \cdots C_m^m \alpha^{\frac{n^2(n-1)ml}{2}} \prod_{1 \leqslant j<i \leqslant n}\left[(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(j-1)}-(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(i-1)}\right] \times \\
& \alpha^{m(k+l)+\cdots+m(k+nl)}(\frac{\beta}{\alpha})^{k(0+1+\cdots+m)} \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)}(-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)}(\frac{\beta}{\alpha})^{l(i_1+2i_2+\cdots+ni_n)} = \\
& \frac{1}{(\sqrt{5})^{mn}}(-1)^{\frac{mn(k+1)}{2}} \alpha^{\frac{mn(n^2+1)}{2}} C_m^0 C_m^1 \cdots C_m^m \prod_{1 \leqslant j<i \leqslant n}\left[(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(j-1)}-(\frac{\beta}{\alpha})^{nl(i-1)}\right] \times \\
& \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n)}(-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)}(\frac{\beta}{\alpha})^{l(i_1+2i_2 \cdots+ni_n)}
\end{aligned}
$$

于是,就完成了定理的证明。值得说明的是从定理的证明过程中可以看出:①$D_n(m,k,l)$ 的值显然与 k 的取值无关;②当 $m>n-1$ 时,由于式(1)中行列式的取值情况较为复杂,导致了 $D_n(m,k,l)$ 的值难以计算,目前还无法给出相应的计算公式。

参考文献:

[1] Hardy G H. Wright E M. Introduction to the theory of Numbers[M]. London:Oxford Unveristy Press,1962.

[2] 杨长恩,吴应龙. 关于 Fibonacci 数的一些性质及一类行列式的计算[J]. 纯粹数学与应用数学,1999,(4):92-94.

(编辑:田新华)

On the Calculation of One Kind of Fibonacci Determinants

LIANG Fang-chi[1,2], XU Cheng-xian

(1. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China; 2. Department of Mathematics and Physics, College of Science, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: The paper concerns the calculation of one kind of determinants $Dn(m,k,l)$ made up of Fibonacci numbers. It demonstrates that identity $Dn(m,k,l)=0$ when $m \leqslant n-2$, and a formula is presented for calculating $Dn(m,k,l)$ when $m=n-1$.

Key words: Filonacci; numbers; determinant; identity