

一类值得注意的点的合成运动问题

冯立富, 李颖, 王军

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要:阐述了两个没有约束联系刚体间的点的合成运动问题是一类值得注意的问题,讨论了在阐述、分析和求解此类问题中的几种常见错误。

关键词:点; 刚体; 动系; 参考体

中图分类号: O31 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2004)03-0081-02

一般的理论力学和工程力学文献中都介绍这样一类点的合成运动问题:甲、乙两运动刚体间没有任何约束联系,需要研究在刚体甲(或乙)上观察到的刚体乙(或甲)上某一点的速度和加速度。正确地阐述、分析和求解这类问题具有重要意义^[1-2]。

正确地阐述、分析和求解此类问题虽然并不复杂,但在许多一般力学文献,特别是在理论力学和工程力学教学中,却常常出现如下3种错误,应当引起注意。

事例1:无论两刚体实际作何种运动,都不加区别地将其看作是作平动。例如文献[3]中有:“汽车A和B,分别沿半径为 $R_A=900\text{ m}$ 、 $R_B=1\ 000\text{ m}$ 的圆形轨道运动,其速度为 $v_A=v_B=72\text{ km/h}$,如图1所示。求当 $\theta=0^\circ$ 和 $\theta=20^\circ$ 时,汽车B对A的相对速度和相对加速度”。这里A、B两车都是作定轴转动的!将动系固连于A车,则B点的速度分析见图2,其中牵连角速度 $\omega_e=v_A/R_A$;牵连速度 $v_e=\omega_e R_B=v_A R_B/R_A$ 。于是可求得相对速度 v_r 的大小与角 θ 无关。原书中显然视两车均作平动,由此得出了 v_r 与角 θ 有关的错误结果。

文献[4]中删去此题,但增加了习题8-18(图3)。题为“图示公路上行驶的两车速度都恒为72 km/h。图示瞬时,在A车中的观察者看来,车B的速度、加速度应为多大?”这样提问虽然可以回避将B车的定轴转动视为平动的错误,但由于并未阐明产生这种错误的原因,因此如果将题目改为“试求图示瞬时,在B车中的观察者看来,车A的速度、加速度应为多大?”则同样的错误将仍可能发生。

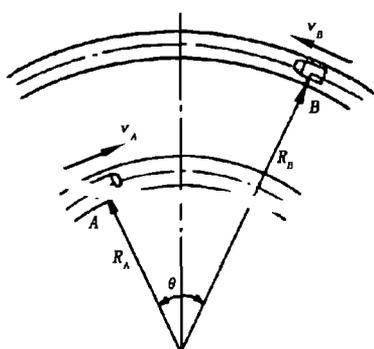


图1

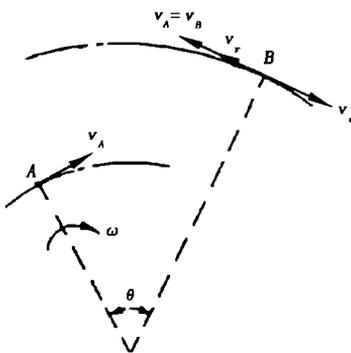


图2

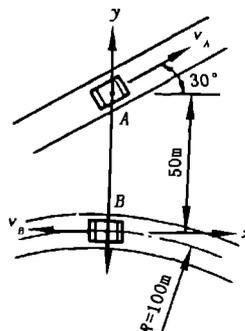


图3

事例2:将两刚体均视为大小可忽略不计的几何点,甚至进而把此类问题归纳为“两个相互之间没有一定约束联系的动点之间的相对运动问题”。这样,分析和求解时须把动系固连在其中的某一个几何点上,即把该点作为一个参考体。

收稿日期:2003-03-28

作者简介:冯立富(1945-),男,河南沁阳人,教授,主要从事一般力学研究。

应当指出,参考体是用来确定物体的位置和描述物体的机械运动而被选作标准的某一刚体。最简单的参考体也应是一条直线(段)。就数学角度而言,参考体的维数须不小于1,而一个几何点的维数等于零。因此,一个几何点是不能被选作参考体的。

文献[5]在讲述此类问题时也发生了这种错误,认为由图4有 $r_B = r_A + r_{B/A}$ 。其求导数可得: $v_B = v_A + v_{B/A}$, $a_B = a_A + a_{B/A}$ 。其中, $v_{B/A} = \dot{r}_{B/A}$ 和

$$a_{B/A} = \dot{v}_{B/A} = \ddot{r}_{B/A} \quad (1)$$

分别称为 B 点相对于 A 点的速度和加速度,见式(1),并有 $r_{B/A} = -r_{A/B}$, $v_{B/A} = -v_{A/B}$, $a_{B/A} = -a_{A/B}$ 。

显然,式(1)是没有意义的。

为便于计算 $v_{B/A}$ 和 $a_{B/A}$,文献[5]接着以 A 为原点建立平动参考系 $Ax'y'z'$ (图5),设 B 点在此平动参考系中的坐标为 x', y', z' ,于是有 $r_{B/A} = x'i + y'j + z'k$ 。将其对时间求导,并考虑到 i, j, k 为常矢量,从而得到:

$$v_{B/A} = \frac{dx'}{dt}i + \frac{dy'}{dt}j + \frac{dz'}{dt}k, a_{B/A} = \frac{d^2x'}{dt^2}i + \frac{d^2y'}{dt^2}j + \frac{d^2z'}{dt^2}k \quad (2)$$

不难看出式(2)与式(1)中的 $v_{B/A}$ 与 $a_{B/A}$ 是不同的。文献[5]在此将一个不能被作为参考体的几何点,主观地换成了一个以该点为原点的平动参考系是不妥的。该文因此发生了与“事例1”性质完全相同的问题,即在习题 15.10、15.11、15.12 中,错误地将作定轴转动的汽车均视为平动刚体。

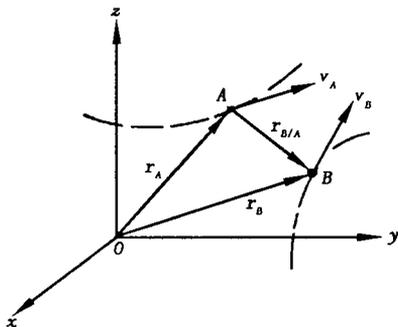


图4

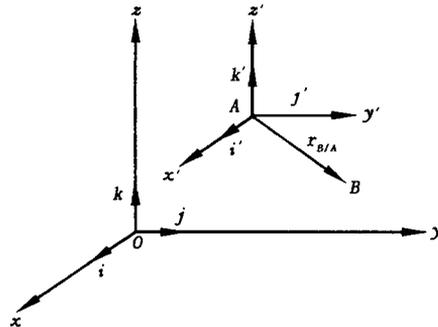


图5

事例3:问题阐述不当。阐述的错误往往是导致分析和求解错误的重要原因之一。例如文献[3]例11-19的正确阐述应为:“图示汽车甲和乙的重心 A 和 B , 分别沿半径为 $R_A = 900$ m 和 $R_B = 1000$ m 的圆周运动,速度 $v_A = v_B = 72$ km/h。试求在甲车上的观察者看到的乙车重心 B 的速度和加速度”。

综上所述,研究两个没有约束联系刚体间的有关点的合成运动问题,是一类应当引起注意的问题。

参考文献:

- [1] 冯立富,郭书祥,韩一磊.论动点、动系的“正选”与“反选”[J].空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(1):81-82.
- [2] 冯立富.动点和动系的选取原则和方法[J].力学与实践,1987,9(5):51-52.
- [3] 哈尔滨工业大学理论力学教研组.理论力学(第4版)[M].北京:高等教育出版社,1981.
- [4] 哈尔滨工业大学理论力学教研组.理论力学(第5版)[M].北京:高等教育出版社,1997.
- [5] Andrew Pytel, Jaan Kiusalaas. Engineering Mechanics - DYNAMICS (second edition) [M].北京:清华大学出版社,2001.

(编辑:姚树峰)

One Sort of Noticeable Problem on Composition Motion of a Point

FEGN Li - Fu, LI Ying, WANG Jun

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: The problem on composition motion of a point between two rigid bodies without restriction contact is interpreted as a sort of noticeable problem in this paper, and some common mistakes easily made in the interpretation, analysis and solution of this sort of problem are discussed.

Key words: point; rigid body; moving system; body of reference