第5卷第3期 空军工程大学学报(自然科学版) Vol.5 No.3
2004年6月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Jun.2004

# 连续导电模式的PWM型开关变换器时域响应的精细积分法

尹有为[1]， 赵录怀[2]， 马西奎[2,3]

(1.空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800;2.西安交通大学 电气工程学院，陕西 西安 710049;3.重庆大学 高电压与电子新技术教育部重点实验室，重庆 400044)

**摘 要**:把精细时程积分法引入开关功率变换器的时域响应分析中.该方法将变换器的数学模型进行离散化处理,采用迭代的方法求解指数矩阵,具有计算精度高、仿真时间短的突出优点,同时简化了分析.实例仿真表明了本方法的正确性.

**关键词**:时域响应;精细积分;开关变换器

**中图分类号**:TM131 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2004)03-0056-04

由于开关变换器是一个强非线性系统,要找到其解析解是相当困难的,所以对开关变换器的建模和仿真一直是开关变换器分析的重点和难点。有众多著名学者从事这方面的研究,取得了大量成果,提出了许多的分析方法,如平均法、离散法、符号分析法和传输线模型法等。但到目前为止,还没有一种统一的建模和仿真的方法。如多频平均法[1-3]在统一模型的基础上利用谐波平衡的原理,容易得到电路状态变量的基波解和各次谐波解,及电路的各种传递函数,具有概念清晰和准确度较高的优点,但它只能对稳态进行仿真;离散时域建模法[4-5]则对电路的动态元件进行离散等效,把动态元件和开关等效为电阻和电流源的并联,即可以把动态电路等效为电阻电路,然后利用结点方程求解,具有等效简单、仿真时间短的优点,但等效的元件值与步长有关系;符号分析法[6]的最大优点是能够求出状态变量的纹波解析式,但它在列写开关变换器的时变方程时使用了状态平均的概念,所以也是一种广义的平均法;传输线模型法[7-8]把一个电路用离散方式表示为一个传输线网络,电流和电压是一个在节点之间来回跳跃的离散脉冲.采用解耦方法和变步长求解,适合于高频开关变换器的仿真。

本文着眼于提高计算精度和速度,引入精细积分法[9-10]用于开关变换器的时域分析,对电路的数学模型进行离散化处理,将微分方程的求解转化为矩阵、向量的代数运算,仿真精度较高,同时节省了仿真时间。

## 1 开关变换器的精细积分法

开关变换器是一种时变网络,随着开关元件的导通和截止,网络的拓扑结构呈周期性的变化。因此开关变换器可建模为分段线性电路,每个拓扑可用以下状态空间方程来描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u} \qquad k=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中:$n$为分段线性模型的拓扑电路数目;$\boldsymbol{x}$是状态变量向量,一般取电感电流和电容电压;$\boldsymbol{A}_k$和$\boldsymbol{B}_k$是第$k$个拓扑电路的系数矩阵;$\boldsymbol{u}$是输入向量。

### 1.1 齐次方程的精细积分

从常微分方程组的理论知道,应先求解式(1)的齐次方程,为统一方程,设

收稿日期:2003-07-14
基金项目:高等学校重点实验室访问学者基金资助项目
作者简介:尹有为(1968-),男,江西井冈山人,博士生,主要从事开关网络建模和仿真研究.

$$\frac{dx}{dt} = Hx \tag{2}$$

其中 $H$ 是常数系统矩阵,其解可以写成为

$$x = e^{H \cdot t} \cdot x_0$$

令时间步长为 $\tau$,一系列等步长 $\tau$ 的时刻为

$$t_0 = 0, t_1 = \tau, \cdots, t_k = k \cdot \tau, \cdots$$

对应有

$$x(\tau) = x_1 = T \cdot x_0, T = e^{H \cdot \tau}$$

以及递推的逐步积分公式

$$x_1 = T \cdot x_0, x_2 = T \cdot x_1, \cdots, x_k = T \cdot x_{k-1}, \cdots$$

于是问题归结为 $T$ 矩阵的计算,如果能够设法精确地算出 $T$ 矩阵,那么就只是一系列的矩阵、向量的代数运算。

文献[9]给出了指数矩阵的精细计算法,主要是利用指数函数的尺度定理,设

$$e^{H \cdot \tau} = [e^{H \cdot \tau/m}]^m \tag{3}$$

其中,可选用 $m = 2^N$,如 $N = 20$,则 $m = 1\ 048\ 576$。由于 $\tau$ 本身是不大的时间段,令 $\Delta t = \tau/m$,将是非常小的一个时间段. 因此有

$$e^{H \cdot \Delta t} \approx I + H\Delta t + (H\Delta t)^2/2! + (H\Delta t)^3/3! + (H\Delta t)^4/4! =$$
$$I + H\Delta t + (H\Delta t)^2 \times [I + (H\Delta t)/3 + (H\Delta t)^2/12]/2$$

由于 $\Delta t$ 很小,幂级数的 5 项展开式精度已经较高,此时指数矩阵 $T$ 与单位阵 $I$ 相差较小,因此

$$e^{H\Delta t} \approx I + T_a$$
$$T_a = H\Delta t + (H\Delta t)^2[I + (H\Delta t)/3 + (H\Delta t)^2/12]/2$$

$T_a$是一个小量,为提高指数矩阵 $T$ 的精度,减少计算机计算过程中的舍入误差,对式(3)进行分解

$$T = (I + T_a)^m = (I + T_a)^{2^N} = (I + T_a)^{2^{N-1}} \times (I + T_a)^{2^{N-1}} \tag{4}$$

一直分解下去,共 $N$ 次,因为有以下关系

$$(I + T_a) \times (I + T_a) = I + 2T_a + T_a \times T_a$$

因此,式(4)可用一个循环语句来实现,当循环结束后再计算:

$$T = I + T_a$$

以上就是指数矩阵 $T$ 的精细计算公式,这是一种 $2^N$ 类的算法。

### 1.2 非齐次方程的精细积分

对非齐次微分方程式(1),由于其在时间步$(t_k, t_{k+1})$内是线性的,所以可以用叠加原理求解. 令 $\Phi(t - t_k)$ 是齐次方程的解,即

$$\Phi = A\Phi, 且\ \Phi(0) = I$$

因此,可以写出式(1)的解为

$$x = \Phi(t - t_k) \cdot [x_k + A^{-1}B_k u] - A^{-1}B_k u$$

数值计算中没有 $\Phi$ 的解析表达式,然而逐步积分需要提供 $t_{k+1}$时刻的向量 $x_{k+1}$,此时

$$\Phi\ (t_{k+1} - t_k) = \Phi(\tau) = T$$

$T$ 矩阵由前面算得. 因此非齐次积分方程的离散逐步递推公式可得

$$x_{k+1} = T \times (x_k + A^{-1}r_0) - A^{-1}r_0 \tag{5}$$

其中,$A$ 为拓扑电路的系统矩阵,$r_0 = B_k u$ 是非齐次方程的非齐次项。

由于开关变换器可建模为分段线性电路,对其每个拓扑进行离散化处理,求解其对应的指数矩阵,然后对式(5)进行迭代运算,即可求得变换器的运行特性。

## 2　实例

BUCK 变换器的电路如图 1 所示,工作于连续导电模式(CCM)时,变换器由两个拓扑结构组成。每个拓扑可用以下状态空间方程描述:

$$x = A_k x + B_k u \qquad k = 1,2$$

其中 ,$\dot{x}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}$,$A_1=A_2=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}$,$B_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}$,$B_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

引入上面介绍的精细积分法,可得

$$x_{k=1}=T\times(x_k+A^{-1}r_0)-A^{-1}r_0$$

其中,$x_k$和 $x_{k+1}$表示 $t_k$和 $t_{k+1}$时刻对应的状态变量的值,指数矩阵 $T$ 由精细积分求得 $A=A_1=A_2$,$r_0=\begin{cases}B_1 & 0\leqslant t\leqslant DT_S\\ B_2 & DT_s\leqslant t\leqslant T_s\end{cases}$,$D$ 为占空比,$T_s$ 为变换器的工作周期。

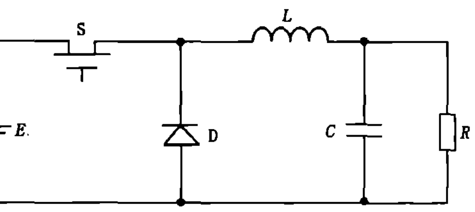
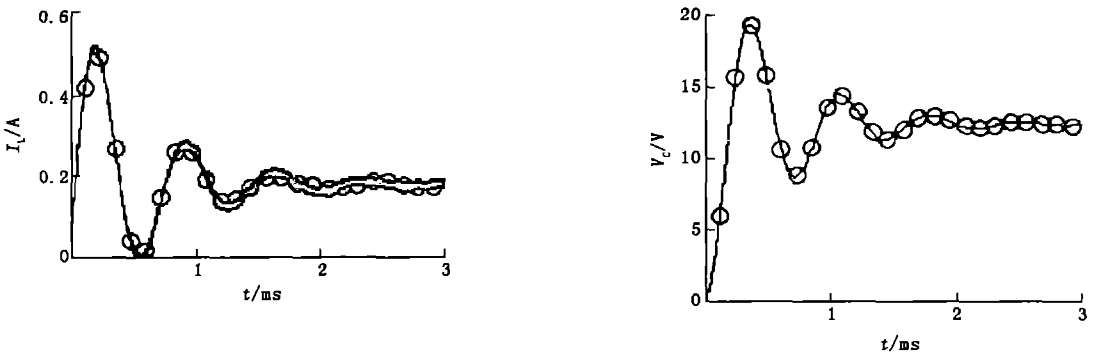


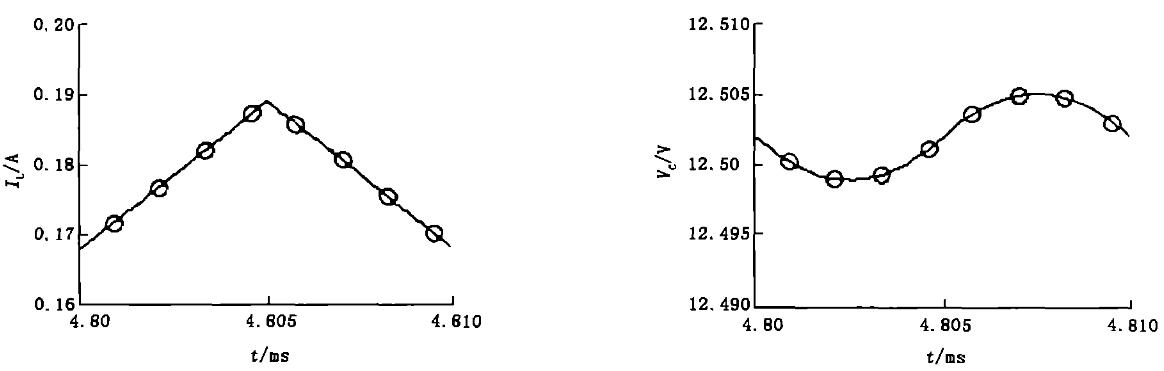

图 1 BUCK 变换器电路

设具体的参数为:$L=3$ mH,$C=4.2$ μF,$R=70$ Ω,$E=25$ V,$T_s=10$ μs,$D=0.5$;为简单计,这里未考虑电感、电容和开关的寄生参数。分别用精细积分法和龙格库塔积分(ODE45)的数值法进行仿真,步长为 0.2 μs,其暂态过程和稳态的电感电流和电容电压的计算结果分别示于图 2 和图 3(实线表示精细积分法仿真结果,圆形表示数值法仿真结果)。




(a)电感电流 (b)电容电压

图 2 精细积分法和数值法的暂态仿真结果




(a)电感电流 (b)电容电压

图 3 精细积分法和数值法的稳态仿真结果

从暂态过程和稳态的仿真结果看,精细积分法和数值法的仿真波形完全吻合,说明本文所提方法具有很高的仿真精度,但相对其它方法而言,仿真时间短。

## 3 结论

利用精细积分法,对 BUCK 开关变换器电路进行了暂态和稳态仿真分析,该方法相对于其它仿真方法来说,具有较高的计算精度,同时可以节省仿真的时间,因为,精细积分法在仿真前对变换器数学模型进行了离散处理,使得对微分方程的求解转换为矩阵向量的代数运算,这是精细积分法突出的特点。

**参考文献:**

[ 1 ] Middlebrook R D, Cuk S. A General Unified Approach to Modeling Switching - Converter Power Stage[J]. Int.. J. Electronics, 1977, 42(6): 521 - 550.
[ 2 ] Caliskan V A, Verghese G C. Multifrequency Average of DC/DC Converter[J]. IEEE Trans. on Power Electronics, 1999, 14 (1): 124 - 133.
[ 3 ] sanders S r, Noworolski J M. Generalized Averaging Method for Power Conversion Circuits[J]. IEEE Trans. on Power Electronics, 1991, 6(2): 251 - 258.
[ 4 ] Pietrenko W, Janke W, Kazimierczuk M K. Application of Semianalytical Recusive Convolution Algorithms for Large - Signal Time - Domain Simulation of Switch - Mode Power Converters[J]. IEEE. Trans. Circuits Syst., 2001, 48(10): 1246 - 1252.
[ 5 ] Chung H S, Hui S Y R, Mak K Y. Time Domain Simulation of Power Electronics Circuits Using Embedded Companion models [J]. IEEE. Trans. Circuits Syst I, 1999, 46(6): 751 - 755.
[ 6 ] 丘水生. 开关功率变换器符号分析方法的原理[J]. 电子学报, 1997, 25(6): 5 - 10.
[ 7 ] Hui S Y R. Modeling Non - Linear Power Eletronic Circuits with The Transmission - Line Technique[J]. IEEEE Trans on PE, 1995, 10(1): 48 - 54.
[ 8 ] Fung K K. Fast Simulation of Multistage Power Electronic Systems with Widely Separated Operating Frequencies[J]. IEEEETrans on PE, 1996, 11(3): 405 - 411.
[ 9 ] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1): 1 - 6.
[10] 赵进全, 马西奎, 邱关源. 有损传输线时域响应的精细积分法[J]. 微电子学, 1997, 27(3): 181 - 185.

(编辑: 田新华)

# A Precise Time - Integration for Analysis of Time - Domain Response to Switched Converters in Continuous Conduct Mode

YIN You - wei[1], ZHAO Lu - huai[2], MA Xi - kui[2,3]

(1. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China; 2. School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China; 3. Key Lab. for High Voltage Engineering and Electrical New Tech. Under the State Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing, Sichuan 400044, China)

**Abstract**: A new precise time - integration method is introduced into the analysis of time domain response to switched power converters. By this direct integration scheme the mathematical model is transformed into discrete equations, then by adopting iterative method the exponent matrix is obtained. The method has the advantages of high accuracy and short simulation time, and simplifies the course of analysis. The simulation of example verifies the correctness of this method.

**Key words**: time - domain response; precise time - integration; switched converters