图的最小最大分支

刘乃功[1]，马润年[2]，杨　雄[3]

(1. 空军工程大学 工程学院，陕西 西安 710038;2. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077;
3. 华南热带农业大学 计算机科学与工程系，海南 儋州 571737)

摘　要:在图的顶点数和边数给定的一类图簇中,主要对图的最小最大连通分支的大小以及结构进行了研究,并且得到若干有意义的结果,这些结果为最小最大连通分支的应用提供了理论基础。

关键词:图论; 完全图; 最大连通分支; 最小最大分支

中图分类号:O15　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1009-3516(2004)02-0089-03

本文所言之图皆指无环无重边的有限无向简单图[1]。通常用$V(G)$和$E(G)$分别表示图G的顶点集与边集,而$m(G)$表示在图G的所有连通分支中顶点数最多的那个连通分支的顶点数,即设$G_1,G_2,\cdots,G_n$是图G的所有连通分支,则$m(G)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|V(G_i)|$,顶点数最多的那个连通分支被称为是最大连通分支。任给$S\subseteq V(G)$,$G-S$表示图G中去掉S和S相关联的边。由于图的最大连通分支的顶点数在研究图论的许多问题中都有应用,诸如在图的完整度和核度等问题[2-5]。本文主要研究下面图的优化问题:

$$\min m(G)=\min_{G\in G(p,q)} m(G)=\min_{G\in G(p,q)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|V(G_i)|$$

其中$G(p,q)=\{G(V,E)\,\big|\,|V|=p,|E|=q\}$。这个问题就是在顶点数$p$和边数$q$给定的情况下,确定图的最大连通分支的顶点数最小应该是多少,这就是所谓的图的最大最小分支问题。

为了研究上面提出的问题,首先给出下面的引理,这个引理也是一个非常重要的组合不等式。

引理:对于任何的正整数$p\geqslant 2$、k和$l(1\leqslant k<l\leqslant p)$,必有

$$\left[\frac{p}{k}\right]\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k}\right]k)(p-\left[\frac{p}{k}\right]k-1)}{2}<\left[\frac{p}{l}\right]\frac{l(l-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{l}\right]l)(p-\left[\frac{p}{l}\right]l-1)}{2} \quad (1)$$

其中$[x]$表示不大于x的最大整数。

证明:为了证明式(1),只需对$l=k+1$的情形证明,其余的递推就可以了。

设$\left[\frac{p}{k+1}\right]=x$,$p=x(k+1)+r$,其中整数$r$满足$0\leqslant r\leqslant k$,很显然$x\geqslant 1$。进一步,设$x+r=yk+s$,其中$y$为非负整数,整数$s$满足$0\leqslant s\leqslant k-1$。这时,$p=x(k+1)+r=xk+x+r=xk+yk+s$,则:$\left[\frac{p}{k}\right]=x+y$,下面证明不等式(1)在$l=k+1$时成立。

考虑不等式(1)的右端减去左端,则有:

$$x\frac{(k+1)k}{2}+\frac{r(r-1)}{2}-(x+y)\frac{k(k-1)}{2}-\frac{s(s-1)}{2}=xk+\frac{r(r-1)}{2}-y\frac{k(k-1)}{2}-\frac{s(s-1)}{2}=$$
$$(yk+s-r)k+\frac{r(r-1)}{2}-y\frac{k(k-1)}{2}-\frac{s(s-1)}{2}=yk\frac{k+1}{2}+sk-rk+\frac{r(r-1)}{2}-\frac{s(s-1)}{2} \quad (2)$$

下面分3种情形来证明式(2)是严格大于零的。

情形1:若$y=0$,则$x+r=s\leqslant k-1$,代入式(2),并且式(2)可化为

收稿日期:2003-09-11
作者简介:刘乃功(1962-),男,陕西渭南人,副教授,主要从事非线性系统研究.

$$xk+\frac{r(r-1)}{2}-\frac{x(x-1)}{2}-xr-\frac{r(r-1)}{2}=x(k-\frac{x-1}{2}-r)\geqslant x(k-x+1-r)\geqslant 2x>0$$

情形 2:若 $y=1$,则式(2)可化为

$$k\frac{k+1}{2}-rk+\frac{r(r-1)}{2}+s(k-\frac{s-1}{2})\geqslant k\frac{k+1}{2}-rk+\frac{r(r-1)}{2}=f(r)$$

下面要证函数 $f(r)>0$ 。众所周知,二次函数 $f(r)$ 关于变量 r 的对称轴为 $r=\frac{1}{2}+K$ 。很显然由于变量 r 在 $0\leqslant r\leqslant k-1<\frac{1}{2}+k$ 范围内,即变量 r 在对称轴的左侧,并且函数 $f(r)$ 的图形是抛物线,其开口向上。这时必有 $f(r)\geqslant f(k-1)$。经计算 $f(k-1)=1$,所以 $f(r)>0$。

情形 3:若 $y\geqslant 2$,则式(2)可化为

$$yk\frac{k+1}{2}+sk-rk+\frac{r(r-1)}{2}-\frac{s(s-1)}{2}\geqslant k(k+1)-rk+\frac{r(r-1)}{2}+s(k-\frac{s-1}{2})\geqslant k(k+1-r)\geqslant k>0$$

综合上述知引理 1 得证。

很明显不等式(1)有着重要的组合意义。其左端表示图的边的数目,其中该图的顶点数为 $p\geqslant 2$,共有 $\left[\frac{p}{k}\right]+1$ 个连通分支,其中顶点数为 k 的连通分支是完全图,共 $\left[\frac{p}{k}\right]$ 个;而顶点数为 $p-\left[\frac{p}{k}\right]k$ 的连通分支也是完全图。共 1 个,总共有的边的数目就是不等式(1)的左端,而不等式(1)的右端表示的是 l 时的边的数目,左端表示的是 k 时的边的数目。

在引理的基础上,我们给出下面的定理 1 和定理 2。

定理 1:在图的顶点数 $p\geqslant 2$ 和最大连通分支的顶点数 m 给定的图簇中,其边数最多的图所具有的边数为 $\left[\frac{p}{m}\right]\frac{m(m-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{m}\right]m)(p-\left[\frac{p}{m}\right]m-1)}{2}$。

证明:首先可以肯定,在 p 和 m 给定的情况下,边数最多的图 G 必然满足:它的每个连通分支 G_1、G_2、…、G_n都一定是完全图(这一点很显然),并且这些连通分支中满足 $|V(G_i)|<m(1\leqslant i\leqslant n)$ 的连通分支最多只有一个。这一点可用反证法,假设 G_1、G_2、…、G_n中有两个连通分支的顶点数小于 m ,无妨设为 $|V(G_2)|\leqslant|V(G_1)|<m$,则在 G_2中去掉一个顶点(减少 $|V(G_2)|-1$ 条边),并把这个顶点加在 G_1 中(增加 $|V(G_2)|$ 条边),则这时的边数比原来增加 $|V(G_1)|-|V(G_2)|+1\geqslant 1$,这与前面假设图 G 的边数最多矛盾。

在 p 和 m 给定的情况下,由于边数最多的图 G 最多只有一个连通分支的顶点数小于 m ,那么顶点数等于 m 的连通分支为 $\left[\frac{p}{m}\right]$ 个,而顶点数小于 m 的那个分支的顶点数为 $p-\left[\frac{p}{m}\right]m$。因此,在顶点数 $p\geqslant 2$ 和图的最大连通分支的顶点数 m 给定的图类中,其边数最多的图具有的边数为 $\left[\frac{p}{m}\right]\frac{m(m-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{m}\right]m)(p-\left[\frac{p}{m}\right]m-1)}{2}$。

定理 2:设 $p\geqslant 2$,若存在正整数 k,使下面的不等式成立:

$$\left[\frac{p}{k}\right]\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k}\right]k)(p-\left[\frac{p}{k}\right]k-1)}{2}<q\leqslant \left[\frac{p}{k+1}\right]\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k+1}\right](k+1))(p-\left[\frac{p}{k+1}\right](k+1)-1)}{2} \tag{3}$$

则 $\min\limits_{G\in G(p,q)} m(G)=k-1$

证明:一方面,由条件(3),$q>\left[\frac{p}{k}\right]\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k}\right]k)(p-\left[\frac{p}{k}\right]k-1)}{2}$ 可证明

$$\min_{G\in G(p,q)} m(G)\geqslant k+1$$

反证法,假设存在图 $G^* \in G(p,q)$ 使 $\min\limits_{G\in G(p,q)} m(G) = m(G^*) = l \leqslant k$。由定理 1 知图 G^* 所含的边数最多为

$$\left[\frac{p}{l}\right]\frac{l(l-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{l}\right]l)(p-\left[\frac{p}{l}\right]l-1)}{2}\leqslant\left[\frac{p}{k}\right]\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k}\right]k)(p-\left[\frac{p}{k}\right]k-1)}{2}<q。$$

这与图 $G^* \in G(p,q)$、即图 G^* 有 q 条边相矛盾。

另一方面,由条件(3),$q\leqslant\left[\frac{p}{k+1}\right]\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k+1}\right](k+1))(p-\left[\frac{p}{k+1}\right](k+1)-1)}{2}$ 可以证明 $\min\limits_{G\in G(p,q)} m(G)\geqslant k+1$。

由前面的证明知 $\min\limits_{G\in G(p,q)} m(G)\geqslant k+1$,因此,这里只需找到一个图使其最大连通分支的顶点数正好是 $k+1$。首先我们构造图 G ,使图 G 有顶点数为 $k+1$ 的连通分支为 $\left[\frac{p}{k+1}\right]$个,而剩余的顶点为一个连通分支。显然这个图共有$\left[\frac{p}{k+1}\right]\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(p-\left[\frac{p}{k+1}\right](k+1))(p-\left[\frac{p}{k+1}\right](k+1)-1)}{2}$ 条边。在图 G 中去掉一些边,使所得的图 $G'\in G(p,q)$,由于 p 和 q 满足式(3),因此,图 G' 至少有一个连通分支其顶点数为 $k+1$,所以 $\min\limits_{G\in G(p,q)} m(G)\leqslant m(G') = k+1$ 。

综合上述知,$\min\limits_{G\in G(p,q)} m(G) = k+1$。定理 2 得证。

前面研究了图的最小最大分支问题,而图的最大最大分支数为 $\max\limits_{G\in G(p,q)} m(G) = \min\{p,q+1\}$。

参考文献:

[1] Diestel R. Graph Theory[M]. New York:Springer - Verlag ,2000.

[2] 许　进. 系统的核与核度理论及其应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1994.

[3] 许　进,费　奇,汪应洛. 信息交流网络系统优化设计的核与核度法[J]. 系统工程学报,2001,16(4):275 -281.

[4] Zhang S G, Wang Z G. Scattering Number in Graphs[J]. International Journal of Networks, 2001,37: 102 - 106.

[5] Bagga K S, Beineke L W, Goddard W D,et al. A Survey of Integrity[J]. Discrete Applied Math, 1992, 37:13 - 18.

(编辑:门向生)

Minimum Maximum Component of Graphs

LIU Nai - gong[1], MA Run - nian[2], YANG Xiong[3]

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China; 2. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China; 3. South China Tropic Agricultural University, Danzhou, Hainan 571737, China)

Abstract: Given the number of vertices and the number of edges in a class of graphs, the size and the structure of the minimum maximum component of graphs are studied, through which some significant results are obtained. The obtained results provide a theoretical foundation for the application of the minimum maximum component.

Key words: graph theory; completed graph; maximum component; minimum maximum component