武器装备试验的Bayes评估及容量计算

康 亮, 董守贵, 郭乃林
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘 要:在实践中评定武器装备时,试验花费常常很大,本文基于Bayes方法设计了一个小子样试验方法以减少开支,提高项目的经济性。该方法可以计算出成败型产品试验的容量,同时可以分析增加试验次数对评定的影响;再进一步估计出参数区间和双方风险,为此类试验提出了一个参考流程,对评估成败型产品有一定的帮助。
关键词:Bayes估计;试验设计;二项分布
中图分类号:E911 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2003)06-0030-04

小子样理论就是在试验量较少的情况下通过充分利用各种信息(包括历史的、不同场合的信息)进行试验分析与评估(即统计推断)的理论。Bayes方法属于小子样理论中的一种,它的一个显著特点就是在保证决策风险尽可能小的情况下,尽量应用所有可能的信息。不仅仅包括现场试验的信息,还包括现场试验之前的信息,如武器系统在研制中的有用信息、仿真试验的信息、同类武器系统的试验信息等。而真正的现场试验数可以是少量的。因此,在上述先验信息存在的情况下,作为一种数据融合方法,Bayes方法可以用于小子样试验分析。

1 Bayes方法

1.1 参数估计

Bayes估计将未知分布参数视为随机变量,且具有先验分布记为 $\pi(\theta)$,当获得试验样本之后,应用Bayes公式计算未知分布参数的验后密度[1]

$$\pi(\theta\backslash x) = \frac{f(\theta\backslash x)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(\theta\backslash x)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta} \tag{1}$$

在统计推断中,以 $\pi(\theta\backslash x)$ 作为Bayes检验方法的出发点,此时未知参数 θ 的Bayes估计为

$$\hat{\theta}_B = E[\theta\backslash x] = \int_{\Theta} \pi(\theta\backslash x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

在置信度为 $1-a$ 下,令

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \pi(\theta\backslash x)\,\mathrm{d}\theta = 1-\alpha \tag{3}$$

满足此式的 $(\theta_1(x),\theta_2(x))$ 就是 θ 的区间估计。

1.2 样本容量

设先验分布函数为 $H(\theta)$,先验密度分布函数为 $h(\theta)$,且样本分布函数为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i\backslash\theta) \tag{4}$$

令 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计,则二次损失函数为[2]

收稿日期:2003-08-29
基金项目:军队科研基金资助项目
作者简介:康 亮(1979-),女,陕西西安人,硕士生,主要从事管理科学与工程研究.

$$L(\hat{\theta},\theta) = (\theta - \hat{\theta})^2 \tag{5}$$

要求二次损失越小越好,设 θ 取 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时的风险

$$R(\hat{\theta}) = \iint L(\theta,\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n))g(x_1,x_2,\cdots,x_n\backslash\theta)h(\theta)\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n \tag{6}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\theta}R(\hat{\theta})\mid_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_0} = 0 \tag{7}$$

其中,$g(x_1,x_2,\cdots,x_n\backslash\theta)$ 为 θ 取 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时的条件密度。使 $R(\hat{\theta})$ 达到最小的 $\hat{\theta}_0$为 Bayes 估计。一般在试验设计中,假设产品已经达到某一要求,获得 $R(\hat{\theta}_0)$,然后计算出参试产品数量,达到对试验样本容量的确认。

2　应用

武器装备试验评估是评定其战术技术性能和作战效能的重要一环,历来受到研究设计、试验和使用部门的关注。另外武器装备越来越复杂,造价越来越高,其试验鉴定的难度也越来越大,试验周期和经费的矛盾也越来越突出。由于武器装备的靶场试验属于破坏性试验,武器装备不能重复性使用,因此靶场试验次数往往不可能很多。

经典的试验统计分析是在大样本或较大样本的前提下进行的,如果试验数较少,由于评估决策所依赖的信息较少,则经典统计方法的置信度不高,意味着将冒较大的风险。在这种情况下,经典的试验分析与评估方法受到了限制。因而,武器装备的试验评估工作需要用到小子样理论。[3]

2.1　先验信息及其表示

用 Bayes 方法解决统计问题时,在利用样本所有提供信息的同时,需要利用先验信息。因此,如何获得先验信息,且将它们用分布形式来表达,这是运用 Bayes 方法首先要解决的问题。

不同产品、不同特性的试验,其先验信息的分布是不相同的。根据成败型试验的特点,可认为其先验分布服从二项分布。[4]即参数为 p 的二项分布,其中 p 为评估指标(合格率)。

2.2　试验样本容量

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是参数为 p 的二项分布的样本,且在[0,1] 上为均匀分布,则 p 的先验分布密度为

$$h(p) = \begin{cases}1, & p\in[0,1]\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{8}$$

给定 p ,样本的分布列为

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid p) = \begin{cases}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}, & x_i = 0 或 1\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{9}$$

在二次损失下,p 的估计为

$$\hat{p} = \int_0^1 ph(p\backslash x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{1}{n+2}(\sum_{i=1}^{n}x_i + 1) \tag{10}$$

试验容量为

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i + 1}{p_0} - 2 \tag{11}$$

设计试验时,可先假设试验样本总体满足设计要求(即为产品设计指标或已经达到的水平标准),再假设在全部试验中这个指标合格的次数为 $\sum_{i=1}^{n}x_i$,代入求解。例如,在投弹试验中,设计要求命中靶心率 p_0为70%,并希望在试验中命中靶心的次数 $\sum_{i=1}^{n}x_i$为3次,则试验容量为4次。

2.3　参数估计

点估计:由式(10) 可计算出参数的点估计 $\hat{p}$。此时,$\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为实际试验结果,不再是假设的值。

区间估计:对于二项分布,上限希望越大越好,但最大只能到1,因此只对下限做出估计,则由式(3)得到:

$$\int_p^1 h(p \backslash x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}p = 1 - \alpha \tag{12}$$

计算可得下限 p 。即,估计值 $\hat{p}$落在区间$(p,1)$ 内的概率为 $1-\alpha$ 。

同时,还可增加试验次数修正估计值。利用递推关系,写出 $n+1$ 时刻的公式:

$$\hat{p}(n+1) = \frac{n+2}{(n+1)+2}\hat{p} + \frac{x_{n+1}}{(n+1)+2} \tag{13}$$

可算出再增加一次试验,参数估计值的变化。[5]

2.4 最大故障数限定

故障数就是不合格数 A_C。如果A_C过大,就不能满足使用方的要求,试验就不必继续下去,应该终止。因此限定产品的最大故障数,可以达到控制试验进程的目的,适时停止试验,节省不必要的浪费。

下面寻找估计值 $\hat{p}$ 与 n A_c、p_0及 α 之间具体函数关系,用以限定产品最大故障数。

设 $x_1,\cdots,x_n$来自二项分布,p 的后验概率密度为

$$h(p \backslash x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{(n+1)!}{(n\bar{x})!(n-n\bar{x})!}p^{n\bar{x}}, & P \in [0,1] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

由于计算比较困难,可转化为$\mu = \dfrac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1)$ 进行近似计算。其中,$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i (x_0 = 0$ 或 $1)$,这里 n 中含有不合格数 A_c。然后由:

$$\mu(1-a) \leqslant \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \tag{14}$$

得到:

$$\mu(1-a) \leqslant \frac{\dfrac{n - A_c}{n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{n - (A_c + np_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)n}} \tag{15}$$

即:

$$A_c \leqslant n - np_0 - \mu(1-a)\sqrt{p_0(1-p_0)n} \tag{16}$$

式中,$\mu(1-\alpha)$ 只与接收水平有关(一般需求对产品做出判断的可信度在95%以上,即$1-a \geqslant 0.95$),随着 α 而改变。可以看到:当调整试验样本容量 n 、设计指标 p_0或 α 时,最大故障数 A_c会发生相应的变化。[6]

2.5 双方风险计算及故障数的二次确定

在限制产品试验容量后,利用以下公式计算风险。

$$p_1 = \lambda_0 p_0 \tag{17}$$

$$a' = 1 - \sum_{d=0}^{A_c} C_n^d {p_o}^d (1 - p_o)^{n-d} \tag{18}$$

$$\beta' = \sum_{d=0}^{A_c} C_n^d {p_1}^d (1 - p_1)^{n-d} \tag{19}$$

其中:p_0 为标准次品率;λ_0 为鉴别比(一般取 1.2~2.2,试验产品越成熟 λ_0越小。);p_1 为使用方允许的最大次品率。若计算值$\dfrac{a'}{\beta'} \approx 1$,且 a' (使用方风险)、β'(生产方风险)均在双方满意的范围内(<0.3),则方案(p_0,λ_0,n,A_c) 可行。否则,调整 A_c(故障数),重新计算,直到 a',β' 双方满意为止。实现流程如图 1 所示。

3 结论

Bayes 方法的特点是尽量利用所有可能的信息,即:总信息 = 先验信息 + 样本(数据)信息随着新的样本数据不断加入,推断过程也就是一个持续、动态的过程。[7]用 Bayes 方法设计靶场试验样本容量,可以在保证精度的同时,减少试验次数。例如,在小样本情况下,用 Bayes 方法估计的试验容量比用经典统计方法估计

的容量少 0 ~2 次,这样就可能节省了一笔经费。通过设计最大故障数,也可以控制试验进程。试验后计算出双方(使用方和生产方)的风险,为决策者决策提供了一定依据。在试验设计过程中,适当调整双方风险与鉴别比,可以方便地获得具体方案。

实践中常常需要验证一些成败型产品的可靠性,其先验分布与本文类似,可以参考本文的方法计算。对于其它类型试验,可根据历史信息先归纳出先验分布,再用 Bayes 方法求解。

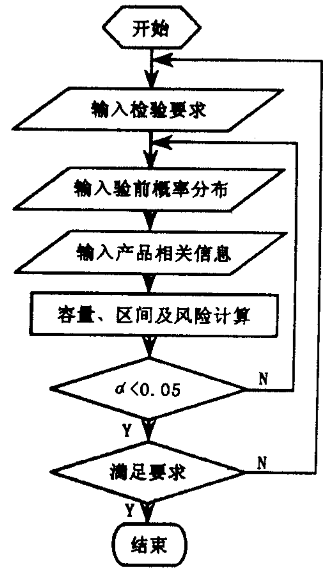

图1 试验设计流程图

参考文献:

[1] 吴 翊. 应用数理统计[M]. 西安:西北工业大学出版社,2001.

[2] 顾天骥. 应用概率统计[M]. 陕西科技出版社,1993.

[3] 唐雪梅,张金槐. 武器装备小子样试验分析与评估[M]. 北京:国防工业出版社,2001.

[4] 张士峰,樊树江. 成败型产品可靠性的 Bayes 评估[J]. 兵工学报,2001,22(2):238 - 240.

[5] 张守钰. Bayes 方法在武器射程评定中的应用研究[J]. 弹道学报,1998,10(2):46 - 49.

[6] 査亚兵,谢莉萍. 导弹射击精度鉴定中 Bayes 方法的运用[J]. 系统仿真学报,2002,14(6):812 - 814.

[7] 刘加丛,秦玉勋. 一种小子样试验数据分析方法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2003,4(1):71 - 73.

(编辑:田新华)

Armament Test Evaluation and Load Calculation Based on Bayesian Assessment

KANG Liang, DONG Shou - gui, GUO Nai - lin

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: Usually the test of armament evaluation costs a large sum of money. Based on Bayesian theory, a small sample test to reduce expenses and improve economical use of the project is designed. Test load can be calculated by introducing binomial distribution in Bayesian formula. The influence of the number of additional test on evaluation can be analyzed at the same time. Furthermore, the normal route of variables and the risk of both sides can be further estimated. Therefore, a reference process helpful to evaluating pass - fail products is proposed.

Key words: Bayesian assessment; test design; binomial distribution