第4卷第5期　　　　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　　　　Vol.4　No.5
2003年10月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Qct.2003

方程 $\Delta u + k^2 u = 0$ 的 Dirichlet 问题的多重替换 MRM 边界变分方程

冀礼鹏，　李炳杰
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安　710077)

摘　要:得到边值问题 $\Delta u + k^2 u = 0;\mathrm{in}\Omega\cup\Omega'\subset\mathbf{R}^2,u|_\Gamma = u_0$ 的定解问题多重替换(MRM)边界变分方程及全平面解的表达式。证明该变分方程解的存在唯一性。从中可以看出,MRM边界变分方程中只包含弱奇异积分核,问题解的表达式后并不加任何多项式,因而也不需要引入Lagrange乘子求解该项,这给边界元数值求解过程带来极大的方便。

关键词:高阶基本解;MRM方法;MRM边界变分方程
中图分类号:O241.8　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2003)05-0092-03

利用边界元法求解Helmholtz方程Dirichlet边值问题的常规方法是引进带有复函数的特殊函数的基本解,这给边界元数值算法带来极大不便。文献[1]给出了该方程的多重替换(MRM)边界积分方程,较好地解决了这一问题。但该方程只适合求解内问题,本文利用高阶基本解系列得到内、外统一的MRM全平面解的表达式及相应的MRM边界变分方程,该方程不但消除了复函数项,而且内、外统一,给数值算法带来极大的方便。

1　预备知识

考虑边值问题

$$\begin{cases}\Delta u + k^2 u = 0 & \mathrm{in}\Omega\cup\Omega\subset\mathbf{R}^2\\ u|_\Gamma = u_0\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 为有界区域,Ω 为 Ω 的外域,Γ 为其边界,k^2 为常数, u_0 为已知函数。

引进高阶基本解系列

$$u_j^* = -\frac{1}{2\pi}\frac{r^2}{4^j(j!)^2}(\ln r - \sum_{l=0}^{j}\frac{1}{l})\qquad j = 0,1,2,\cdots\tag{2}$$

u_0^* 是Laplace方程的基本解,且满足 $\Delta u_{j+1}^* = u_j^*\ (j=0,1,2,\cdots)$,反复利用高阶基本解系列进行多重替换,可得到问题(1)内问题的边界积分方程

$$cu = \sum_{j=0}^{n}(-k^2)^j\int_\Gamma(u_j^*\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u_j^*}{\partial n})\mathrm{d}\Gamma + (-1)^n(k^2)^{n+1}\int_\Omega uu_j^*\mathrm{d}\Omega\tag{3}$$

这里 $c = \frac{\alpha}{2\pi}$,α 为边界上点左右切线之间的内夹角,对光滑点 $\alpha = \pi$,n 为 Ω 边界上点的单位法向量。

当 $n\to+\infty$ 时,只要 r,k 有界,余项 $(-1)^n(k^2)^{n+1}\int_\Omega uu_j^*\mathrm{d}\Omega$ 趋于零,因此,对充分大的 值可推出问题(1)内问题的MRM边界积分方程

收稿日期:2002-12-11
作者简介:冀礼鹏(1957-),男,陕西扶风人,讲师,主要从事数理方程研究.

$$cu = \sum_{j=0}^{n}(-k^2)^j\int_\Gamma\left(u_j^*\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u_j^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{4}$$

2 MRM 边界变分方程

引理 1　若 $u_0\in H^{1/2}(\Gamma)$,则问题(1)在 $H^1(\Omega)$ 和 $W_0^1(\Omega')$ 中有唯一解 [2-3]。

对 Dirichlet 边值问题(1)可得到一个 $W_0^1(\mathbf{R}^2)$ 中的解

$$u\in W=\{u\in W_0^1(\mathbf{R}^2)\mid\Delta u+k^2u=0 \quad \mathrm{in}\,\Omega\cup\Omega'\subset\mathbf{R}^2$$

显然 W 中不包含任何多项式,应用 Green 公式可得到变分方程

$$\int_{\mathbf{R}^2}\nabla v\mathrm{d}\Omega + k^2\int_{\mathbf{R}^2}uv\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma v\sigma\mathrm{d}\Gamma \qquad \forall v\in W_0^1(\mathbf{R}^2) \tag{5}$$

这里 $\sigma(x)=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=\frac{\partial u}{\partial n^-}-\frac{\partial u}{\partial n^+},\sigma(x)\in H^{-1/2}(\Gamma)$

引理 2　若 $\sigma(x)\in H^{-1/2}(\Gamma)$,则变分方程(5)在 $W_0^1(\mathbf{R}^2)$ 中有唯一解[2-3]。

引理 3　变分方程(5)定义了由 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $W_0^1(\mathbf{R}^2)$ 的同构映射[2-3]。

问题(1)的基本解为 $u^*=-\frac{i}{4}H_0^{(2)}(kr)$,其中 $H_0^{(2)}(kr)$ 为 Bessel 函数。这样 Dirichlet 边值问题(1)的解可表示为内、外统一的边界积分方程形式

$$u(y) = \int_\Gamma\sigma(y)u^*(x,y)\mathrm{d}\Gamma_x \qquad y\in\mathbf{R}^2 \tag{6}$$

并且满足第一类 Fredholm 边界积分方程

$$u_0(y) = \int_\Gamma\sigma(y)u^*(x,y)\mathrm{d}\Gamma_x \qquad y\in\Gamma \tag{7}$$

如果令 $u^*=F(u^*)+iG(u^*)$,利用文献[3]容易验证 $\int_\Gamma\sigma(x)G(u^*(x,y))\mathrm{d}\Gamma_x=0$

引理 4[4]　设算子 $P(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha D^\alpha=\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha i^{-|\alpha|}\partial^\alpha$ 是椭圆的,如果对某个广义函数 $u\in\Psi(\mathbf{R}^2)$,有:$P(D)u=0$,则 一定是 1 个多项式,此处 $\Psi'(\mathbf{R}^2)$ 为速降函数空间, $\Psi'(\mathbf{R}^2)=\{u\in C^\infty\,|x^k\partial^\alpha u(x)\to0$,当 $|x|\to\infty$ 对任意重指标 α,k。

由引理 4 及文献[5]不难证得,如果 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\Omega')\cap\Psi'(\mathbf{R}^2)$,$\Psi'(\mathbf{R}^2)$ 为速降函数空间,且满足 $\Delta u+k^2u=0 \quad \mathrm{in}\,\Omega\cup\Omega'\subset\mathbf{R}^2$,则问题(1) 内、外统一的解可表示为

$$u(y) = \sum_{j=0}^{\infty}(-k^2)^j\int_\Gamma\sigma(x)u_j^*(x,y)\mathrm{d}\Gamma_x \qquad \forall y\in\mathbf{R}^2 \tag{8}$$

第一类 Fredholm 边界积分方程可化为 MRM 边界积分方程

$$u_0(y) = \sum_{j=0}^{\infty}(-k^2)^j\int_\Gamma\sigma(x)u_j^*(x,y)\mathrm{d}\Gamma_x \qquad \forall y\in\Gamma \tag{9}$$

积分方程(9)是 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 的同构映射,它可表示为变分方程

$$b(\sigma,\sigma') = \langle u_0,\sigma\rangle_\Gamma \qquad \forall\sigma'\in H^{-1/2}(\Gamma) \tag{10}$$

$$b(\sigma,\sigma') = \sum_{j=0}^{\infty}\int_\Gamma\int_\Gamma(-k^2)^j\sigma(x)\sigma'(y)u_j^*(x,y)\mathrm{d}\Gamma_x\mathrm{d}\Gamma_y \tag{11}$$

定理:变分方程(10)在 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 中有唯一解。且满足

$$b(\sigma,\sigma)\geqslant\alpha\|\sigma\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \qquad \forall\sigma\in H^{-1/2}(\Gamma);(\alpha>0)\text{ 为常数} \tag{12}$$

证明:这里只需证明双线性形式 b 的 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 强制性即可。b 的连续性以及式(10)右端线性泛函的连续性是显然的。设 u 是对应于 σ 的由式(8)所确定的解, u 是对应于 σ' 的由(8)式所确定的解,两者均满足积分方程(10)。

$$b(\sigma,\sigma') = < u_0,\sigma' >_\Gamma = -\int_{\mathbf{R}^2} \nabla u \nabla u' \mathrm{d}\Omega + k^2\int_{\mathbf{R}^2} uu' \mathrm{d}\Omega$$

$$b(\sigma',\sigma) = < u_0,\sigma >_\Gamma = -\int_{\mathbf{R}^2} \nabla u' \nabla u \mathrm{d}\Omega + k^2\int_{\mathbf{R}^2} u'u \mathrm{d}\Omega$$

这说明 b 是对称的,同时:

$$| b(\sigma,\sigma) | = \left| -\int_{\mathbf{R}^2} \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}\Omega + k^2\int_{\mathbf{R}^2} uu \mathrm{d}\Omega \right| \geqslant | u |^2_{W_0^1(\mathbf{R}^2)} + k^2 | u |^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

$$\geqslant c_1 \| u \|^2_{W_0^1(\mathbf{R}^2)} + k^2 c_3 \| u \|^2_{W_0^1(\mathbf{R}^2)} \geqslant c \| u \|^2_{W_0^1(\mathbf{R}^2)} \geqslant c \| \sigma \|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

最后一个不等式是根据式(8)所定义的由 $\sigma \to u$ 的线性泛函的连续性决定的,即:

$$(\| \sigma \|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)})^{1/2} = \sup_{v \in W_0^1(\mathbf{R}^2)} \frac{| -\int_{\mathbf{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\Omega + k^2\int_{\mathbf{R}^2} uv \mathrm{d}\Omega |}{\| v \|_{W_0^1(\mathbf{R}^2)}} \leqslant \beta \| u \|_{W_0^1(\mathbf{R}^2)} \quad (\beta \text{ 为常数})$$

根据 Lax - Milgram 定理,变分方程(10)在 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 上有唯一解且满足方程式(12)。证毕。

综合上述,得到求解问题(1)的途径是,由变分方程(10)确定出 $\sigma(x) \in H^{-1/2}(\Gamma)$,再代入解的积分表达式(8),得到全平面上任意点的数值解 $u \in W_0^1(\mathbf{R}^2)$。

参考文献:

[1] Kamiya N ,Andoh E. A note on Multiple Reciprocity Method integral formulation for the Helmholtz equation[J]. Comm. Numer Method Eng,1993,19(3):9 - 13.

[2] 李炳杰. 有两组高阶基本解系列的 MRM 边界积分方程[J]. 应用数学学报,2000,23(4): 534 - 542.

[3] 李炳杰. 偏微分方程 $\Delta^2 - S\Delta u + k^2 u = 0$ 边值问题的 MRM 边界变分方程[J]. 应用数学学报,2002,25(4): 34 - 40.

[4] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京:科学出版社,1993.

[5] 冀礼鹏,李炳杰. 一类非线性抛物型方程的边界积分公式[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2001,2(1):92 - 94.

(编辑:门向生)

The Multiple Reciprocity Method (MRM) Boundary Variation Equation for Dirichlet Boundary Value Problem of Equation $\Delta u + k^2 u = 0$

JI Li - peng, LI Bing - jie

(The Telecommunication Engineenng Institute, Air Force Engineenng Universıty, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: The multiple recıprocıty method (MRM) boundary variation equatıon, planar solutionexpressıon and well - posedness of Boundary Value Problem of Equatıon $\Delta u + k^2 u = 0; in \Omega \cup \Omega' \subset R^2, u|_\Gamma = u_0$ are derived. This proves the exıstence and unıqueness of the (MRM) boundary variation equatıon. It is manifested that the multiple recıprocıty method (MRM) boundary variation equatıon only contaıns the weak singular integral kernel and there ıs no any polynomial to be added to the expressıon of solution. Therefore, it is unnecessary to ıntroduce the Lagrange multipliers in finding the solution, which provides a great convenıence for the boundary element numerical solution process.

Key words: higher - order fundamental solution; MRM method; boundary variation equatıon